Н. М. Черемисин
В. В. Черкашина

КРИТЕРИАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ И СИСТЕМАХ

Учебное пособие

Харьков
«Факт»
2014

УДК 621.3
ББК 31.279
Ч46

Утверждено к печати Ученым советом Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (протокол № 5 от 30 мая 2014 г.)

Рецензенти:

Лежнюк Петр Демьянович — доктор технических наук, професор, заведующий кафедрой электрических станций и систем, Винницкий национальный технический университет;

Мороз Александр Николаевич — доктор технических наук, професор, директор учебно-научного института энергетики и компьютерных технологий Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. П. Василенка

Черемисин Н.М.

Ч46 Критериальный метод анализа технико-экономических задач в электрических сетях и системах: учебное пособие / Н.М. Черемисин, В.В. Черкашина. — Харьков: Факт, 2014. — 88 с.

ISBN 978-966-637-770-1

В учебном пособии с позиций теории принятия решения изложены основные положення критериального метода, базирующегося на теории подобия и математическом программировании. Рассмотрена реализация электроэнергетических задач в условиях неполноты исходной информации.

Пособие предназначено для студентов и аспирантов электроэнергетических специальностей, а также для специалистов в области методов оптимизации.

УДК 621.3
ББК 31.279

ISBN 978-966-637-770-1

ВВЕДЕНИЕ

Современная электроэнергетическая система (ЭЭС) Украины представляет собой взаимосвязанные объекты, которые функционируют в условиях неоднородности их структуры, низкой наблюдаемости, многочисленных внешних и внутренних возмущений. По мере их развития изменяется как стратегия исследования, так и методология поиска оптимальных решений. Поэтому все большее внимание уделяется постановке и решению оптимизационных задач, целью которых является выбор оптимального построения электрических сетей и систем.

ЭЭС — совокупность электрических установок и устройств, обеспечивающих передачу электрической энергии на расстояние. В ее состав входят понижающие и повышающие трансформаторы, воздушные и (или) кабельные линии электропередачи, высоковольтные выключатели, аппаратура защиты и противоаварийной автоматики. Функциональные возможности ЭЭС зависят, в первую очередь, от напряжения и протяженности линий, обеспечения устойчивости ее режима, условий эксплуатации, величины допустимых потерь и т. д.

При реализации подобного рода задач целесообразно руководствоваться системой иерархически построенных и взаимосвязанных технико-экономических моделей разных функциональных уровней, при этом стратегия поиска осложняется неполнотой исходной информации и многокритериальностью, что усложняет принятие решения при выборе оптимального варианта ЭЭС.

В качестве инструмента исследования таких технико-экономических моделей в электроэнергетике за последнее время нашел применение критериальный метод, позволяющий провести анализ в условиях неполной исходной информации. Возможной реализацией критериального метода является решение по одному из критериев и замена дополнительных критериев системой ограничений. В каждом конкретном случае выделение «главного критерия» и построение системы ограничений связано с условиями задачи, с тактикой и методикой ее реализации.

В учебном пособии с позиций теории принятия решения изложены основные положения критериального метода, базирующегося на теории подобия и математическом программировании. Рассмотрены примеры реализации некоторых задач.

В первой главе рассмотрены принципы построения технико-экономических моделей и пути их реализации в условиях неполноты исходной информации. Определен подкласс функций, к которым относятся эти модели. Даны основные определения и характеристики критериального метода.

Во второй главе рассмотрена реализация неканонических технико-экономических моделей положительной степени трудности для определения экономически целесообразных значений параметров оптимизации. Проведен анализ решений задач на предмет устойчивости. Получены алгоритмы, позволяющие исследовать чувствительность решения задачи к изменению исходной информации во времени.

В третьей главе описаны возможности замены технико-экономических моделей с использованием алгоритмов линейного программирования. Проведена оценка устойчивости задач положительной степени трудности при неполной исходной информации.

В четвертой главе показана комплексная реализация критериального метода для оптимального построения ЭЭС.

1. РЕАЛИЗАЦИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОТЫ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

1.1. Принцип построения технико-экономических моделей и пути их реализации

Задачи технико-экономического анализа имеют три составные части:

— выбор критериев оптимальности;

— составление математической модели;

— отыскание метода ее реализации.

В зависимости от условия задачи может быть выбран критерий оптимальности.

Такие условия предполагают минимум веса объекта, максимум площади, минимум затрат. Обычно, если ставится задача отыскания оптимальных технико-экономических связей, то одним из главных критериев является минимум дисконтных затрат.

При построении технико-экономических моделей практически невозможно учесть все внутренние стохастические связи. Так как информация о таких связях обычно не полная и зачастую неопределенная, то формализация задачи оптимизации требует учета дополнительных критериев.

Это справедливо и для оптимизации ЭЭС, где при наличии главного критерия — минимума дисконтных затрат, действуют и другие дополнительные критерии. При этом одним из путей реализации критериальных задач является редукция к одному главному критерию экономичности и замене дополнительных критериев системой ограничений на переменные технико-экономического функционала.

Для оптимизации ЭЭС на сегодня используют два класса математических моделей.

К первому классу моделей относятся оценочные математические модели. Суть которых выражается в возможности детального учета индивидуальных особенностей конкретного объекта оптимизации. Реализация оценочных моделей возможна при помощи алгоритмов и программ расчетов на персональной электронной вычислительной машине (ПЭВМ) определенного конечного множества предварительно намеченных решений.

Практика использования математических оценочных моделей показала достаточную их эффективность, особенно когда рассматривается не одна модель, а система технико-экономических моделей, позволяющая в конечном итоге сделать принципиальные выводы.

Несмотря на определенные преимущества оценочных моделей, они имеют определенные недостатки. Основным является большая вероятность выбора неоптимального варианта, так как возможность оценки сравниваемых вариантов достаточно мала, чтобы с заданной достоверностью выбрать наилучшее решение из всего множества допустимых решений. Поэтому оценочные модели требуют дательной мотивировки выбора возможных вариантов сравнения.

К другому классу моделей, с точки зрения принципов формирования и использования математического аппарата, относятся оптимизационные модели. В этом случае одна модель включает в себя описание всего множества допустимых решений. Границы применимости таких моделей достаточно широки, но реализация их трудоемка и не всегда доступна, что служит определенным толчком для развития методов вычислительной математики, позволяющих с достаточной степенью точности реализовать эти задачи.

В практике составления и реализации математических моделей не существует общепринятых концепций. В каждом конкретном случае построение технико-математической модели и метод ее решения тесно взаимосвязаны. Только на основании большого опыта можно рекомендовать тип технико-экономических моделей и методы их реализации.

В настоящее время наблюдается тенденция совместного использования оценочных и оптимизационных моделей. Для этого предварительно с помощью оптимизационной модели выбираются варианты, лежащие вблизи оптимального решения. После чего с помощью оценочной модели идет поиск наилучшего варианта из предварительно намеченных решений. Этот путь комплексного применения обоих типов моделей недостаточно изучен как в теоретическом, так и в практическом аспектах.

При решении общей проблемы оптимальности необходимо учитывать характер исходной информации, которая может быть детерминированной, стохастической или адаптивной.

Детерминированный подход к решению задачи позволяет найти оптимальное решение достаточно просто. При стохастическом подходе к решению некоторая часть исходной информации сохраняет детерминированный характер, а другая ее часть заменяется статистическими характеристиками. С течением времени достоверность информации снижается, что ведет к неопределенности исходной информации. В этом случае используют адаптивный подход.

После того, как модель сформирована, перед исследователями возникает не менее трудная задача — выбор метода реализации модели.

В настоящее время в математике нет универсальных методик, позволяющих во всех случаях находить глобальный экстремум. Выбор того или иного метода решения зависит в первую очередь от класса функционала и ограничений, которые присутствуют в конкретной задаче.

В связи с этим существующие задачи в зависимости от вида целевой функции и ограничений делят на пять основных типов:

— задачи линейного программирования;
— задачи нелинейного программирования;
— задачи дискретного программирования;
— задачи динамического программирования;
— задачи стохастического программирования.

На сегодняшний день наиболее разработанными являются алгоритмы линейного программирования, реализующие линейные программы с линейными ограничениями.

Основным достоинством данного метода является то, что он достаточно эффективен для реализации задач с большим числом переменных.

Вслед за разработкой методов линейного программирования ведутся исследования в других направлениях математического программирования. Это было связано с тем, что в большинстве случаев детальная разработка технико-экономических моделей выявляла нелинейный характер основных экономических связей оптимизированного объекта. Как у нас в стране, так и за рубежом опубликовано достаточное количество работ теоретического характера, направленных на совершенствование методов линейного и нелинейного программирования.

Применимость того или иного метода, как уже отмечалось, зависит от того класса задач, реализация которых наиболее эффективна в данном случае. Например, если функционал обладает марковским свойством, то в ряде случаев эффективны методы динамического программирования.

При проектировании ЭЭС возникает целый ряд целочисленных или комбинаторных задач, которые могут быть решены с использованием метода ветвей и границ.

Большая группа методов, применяемых для реализации задач систем электропередачи, построена на алгоритмах случайного поиска. Для некоторого вида задач весьма эффективен метод покоординатной оптимизации, предполагающий отыскание глобального экстремума на каждом шаге и по каждой переменной.

Для решения задач оптимального управления в системах электропередачи в ряде случаев применяет метод статистических испытаний.

Все перечисленные методы обладают существенным недостатком. Они не особенно эффективны, исключая линейное программирование, для реализации задач большой размерности и при неполной исходной информации.

Для реализации подобного рода задач на сегодняшний день наиболее эффективен критериальный метод, позволяющий провести комплексное исследование решения задачи при известной и неопределенной исходной информации.

1.2. Критериальный метод анализа технико-экономических моделей

1.2.1. Основные особенности метода

Выбор стратегии и тактики реализации технико-экономических моделей зависит от вида подкласса, к которому относится функция цели. Технико-экономические задачи энергетики, как правило, описываются с помощью полиноминальных (позиноминальных) уравнений нескольких переменных с учетом технических требований к этим переменным. Для анализа уравнений с небольшим числом параметров оптимизации используют относительные единицы и принцип экономической соизмеримости.

В 70-х годах прошлого столетия на кафедре электрических систем Московского энергетического института (МЭИ) разработан метод критериального программирования, основанный на теории подобия, позволяющий минимизировать полином вида

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \tag{1.2.1}$$

где A_i — положительные обобщенные константы, представляющие собой исходную информацию об объекте оптимизации. Они имеют детерминированный или вероятностный характер в зависимости от условий задачи; x_j — параметры оптимизации, положительные переменные; α_{ij} — показатели степени, действительные числа; m_1 — число слагаемых в полиноме; n — число неизвестных параметров.

Ограничения, накладываемые как на отдельные переменные x_j, *так и на их комплексы, представляются в виде позиномов, аналогичных (1.2.1)*

$$q_k(x) = \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} A_i \sum\nolimits_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1. \tag{1.2.2}$$

Необходимым условием существования условного минимума функции с ограничениями является требование каноничности функции, под которым понимают функцию, в которой $M - n - 1 = 0$ (M — общее число слагаемых в полиноме и ограничениях).

Разработанные алгоритмы критериального программирования позволяют найти оптимальные и количественные экономические связи объекта как при заданной, так и при неполной исходной информации. Кроме того, достоинством метода является то, что наряду с определением оптимальных значений функции цели и параметров оптимизации возможно оценить устойчивость функции к изменению параметров в окрестностях точки минимума, исследовать чувствительность решения задачи к изменению исходной информации.

Таким образом, критериальный метод имеет более широкие цели и возможности анализа технико-экономических моделей в сравнении с другими методами математического программирования.

1.2.2. Содержание метода критериального программирования

В отличие от других методов, критериальный метод представляет собой целый комплекс исследований, основными пунктами которого являются:

1) поиск экономически целесообразных значений параметров оптимизации, соответствующих наименьшему значению целевой функции как с техническими ограничениями, так и без них;

2) выявление экономической соразмерности исследуемого объекта, предполагающее определение долей участия каждой составляющей целевой функции в оптимальном варианте;

3) исследование устойчивости целевой функции к изменению параметров оптимизации;

4) анализ чувствительности функции к изменению исходной информации.

Так как исходная информация об исследуемом объекте используется с определенной погрешностью, то при анализе объекта желательно знать, как влияет на целевую функцию отклонение параметров оптимизации от своих экономически целесообразных значений. Считают модель устойчивой, если малые отклонения ее параметров ведут к незначительным отклонениям целевой функции.

При решении технико-экономических задач важно знать влияние погрешности исходной информации на исходный экономический вариант. Исследования чувствительности позволяют обосновать необходимую степень точности исходной информации.

1.2.3. Критериальный анализ канонических моделей в электрических сетях и системах

Канонические модели, встречающиеся в задачах систем электропередачи, могут быть представлены в виде полинома

$$y = A_0 + \sum_{i=1}^{n+1} A_i \sum_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}. \tag{1.2.3}$$

Критериальный анализ предлагает исследование заданной функции (1.2.3) в окрестностях базисной точки, т. е. в $(n + 1)$ — мерном пространстве параметров оптимизации x_j и функции y.

Постоянная составляющая в выражении (1.2.3) не влияет на выбор базисной точки и поэтому может не учитываться. Однако A_0 имеет существенное значение при оценке полной величины функции. В соответствии с принятым допущением (1.2.3) можно представить в виде:

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n+1} A_0 \prod_{j=1}^{n} x_j. \tag{1.2.4}$$

Очень часто обобщенные константы A_1 известны лишь приблизительно, что затрудняет применение методов оптимизации. В этом случае применим критериальный анализ, который позволяет вести исследование на моделях, предоставленных в критериальной форме и имеющих вид:

$$\underset{*}{y}_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \prod_{\underset{*}{x}_j}^{\alpha_{ij}} x_j \,. \tag{1.2.5}$$

где π_i — критерии подобия, определенные как

$$\pi_i = \frac{Ai}{y_1\delta} \prod_{j=1}^{n} x_{j\delta}^{\alpha_{ij}} \;, \; i = \overline{1, \quad n+1}, \tag{1.2.6}$$

где $\underset{*}{x}_j$ — относительное значение параметров оптимизации; α_{ij} — действительные числа; $\underset{*}{y}_1$ — относительная величина переменной части функции (рис.1.1).

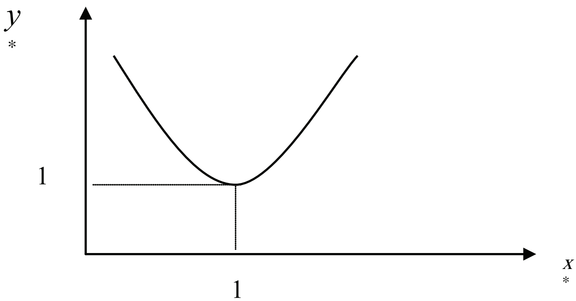

Рис. 1.1. Критериальная форма представления модели

Для определения критериев подобия π_i из (1.2.6) необходимо знать величину обобщенных констант A_i, предварительно выбрав базисное значение функции $y_1\delta$. В случае, когда отсутствует информация об A_i, величину критериев подобия определяют из уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1; \tag{1.2.7}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial xj}\right|_{x_j = x_{j\delta}} = \frac{y\delta}{x_j\delta} \sum \alpha_{ij} \pi_i = 0, \quad j = \overline{1, n} \,. \tag{1.2.8}$$

В этом выражении необходимо соблюдать условие, что число слагаемых в полиноме должно на единицу превышать число переменных

$$X = (x_1, x_1, ..., x_n)\ ,$$

где X — n-мерный вектор, расположенный в положительном октанте пространства X^n.

Рассмотрим квадратичную матрицу порядка (n+1), полученную присоединением к матрице размерностей (α_{ij}) столбца, составленного из единиц

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{11} & ... & \alpha_{21} & 1 \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ \alpha_{n+11} & \alpha_{n+12} & ... & \alpha_{n+1n} & 1 \end{pmatrix} \qquad (1.2.9)$$

Для того, чтобы функция (1.2.4) была канонической, необходимо, чтобы алгебраические дополнения элементов последнего столбца матрицы A_1 были отличны от нуля и имели один знак.

Доказано, что если только соблюдается условие каноничности функции, то эта функция имеет единственную точку экстремума X_0, в которой достигается минимум

$$\alpha^2 y(X_0) = 0. \qquad (1.2.10)$$

Для анализа устойчивости таких функций к изменению параметров оптимизации в окрестностях базисной точки используется аппроксимация целевой функции (1.2.5) членами второго порядка разложения Тейлора в точке минимума. В этом случае область экономической устойчивости представляется приближенно эллипсоидом.

Для анализа нелинейных функций с ограничениями применяют функцию Лагранжа, минимум которой по переменным совпадает с условным минимумом целевой функции с ограничениями. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(x) = y(x) + \sum_{k=1}^{p} M_{k0}\,[q_k(x) - 1], \tag{1.2.11}$$

где $L(x)$ — функция Лагранжа; $y(x)$ — целевая функция; $q_k(x)$ — некое ограничение; M_{k0} — неопределенные множители Лагранжа, значения которых определяются в процессе нахождения условного минимума.

Функция $y(x)$ с учетом ограничения $q_k(x)$ имеет условный минимум, если система уравнения

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_{ij}\pi_i = 0, \; j = \overline{1, \quad n}, \tag{1.2.12}$$

полученная из частных производных функции Лагранжа в точке минимума, имеет хотя бы одно строго положительное решение:

$$\pi_i > 0, \; i = \overline{1, \quad M}, \tag{1.2.13}$$

где M — общее число слагаемых целевой функции и ограничений.

Таким образом, при выполнении условий каноничности технико-экономические модели решаются достаточно просто, не требуют больших затрат времени и практически реализуют все технико-зкономические задачи критериального программирования (устойчивость, чувствительность и др.) как при заданной, так и при неопределенной исходной информации.

Исходя из вышеизложенного, одной из приемлемых форм решения технико-экономических задач является такое представление моделей, которое удовлетворяет условиям каноничности и, следовательно, может использовать для реализации существующие алгоритмы критериального метода.

1.2.4. Критериальный анализ неканонических моделей

В электроэнергетике не всегда выполняются условия каноничности целевой функции, а именно $m_1 \neq n + 1$.

Это условие связано со степенью трудности задачи d.

$$d = m_1 - n - 1. \qquad (1.2.14)$$

Технико-экономические модели подобного класса являются многопараметрическими и, как правило, неканоническими, а с позиций критериального программирования не имеют большой степени трудности d.

Например, модели, описывающие технико-экономические связи в системах электропередачи, представляют собой полиномы, состоящие из 5–10 составляющих и всего одной переменной. Такие модели относятся к неканоническим моделям с положительной степенью трудности.

Для поиска эффективных методов решения неканонических моделей используют принцип выпуклого программирования, теорию неравенств и двойственности.

Для геометрических программ с положительной степенью трудности максимизирующий вектор весов каждой составляющей целевой функции меняется в зависимости от коэффициентов A_i и при определенных условиях существует производная оптимальных параметров коэффициентов. Они могут быть определены для данного вектора коэффициентов, если для него известны оптимальные значения параметров.

Также для реализации неканонических моделей возможен путь разложения модели на ряд канонических. Полученные канонические модели имеют минимум, что позволяет использовать их для анализа устойчивости. Но такой путь довольно громоздок и его реализация не всегда возможна.

Для случая неканонических функции как с ограничениями, так и без них получены формулы зависимостей критериев подобия от коэффициентов A_i в относительных единицах. Однако в данной постановке задача определения как критериев подобия, так и параметров оптимизации не может быть решена однозначно. Кроме того, анализ устойчивости и чувствительности в задачах с большой степенью трудности связан со значительными по времени вычислительными мероприятиями.

Реализация неканонических моделей зависит также от величины степени трудности задачи. С увеличением степени трудности задачи растет время составления и решения ее на ПЭВМ, а также усложняется поиск точки нулевого приближения, участвующей в реализации задачи.

Поскольку модели ЭЭС являются неканоническими с положительной степенью трудности, то для решения их наиболее разработанными на сегодняшний день являются алгоритмы линейного программирования, реализующие стандартные программы математического обеспечения ПЭВМ.

В настоящее время весьма актуальны вопросы влияния фактора времени на процессы оптимизации объектов систем электропередачи, изменение параметров которых зависит от динамики роста нагрузки. Поэтому представляет большой интерес разработка алгоритмов критериального метода, учитывающих чувствительность изменения оптимальных параметров объекта ко времени.

Существуют два пути, позволяющие реализовать технико-экономические модели при известной и неполной исходной информации.

Первый предполагает создание методик решения неканонических моделей, на базе которых проанализированы задачи систем электропередачи.

Второй предполагает такое построение моделей, анализ которых доступен существующим алгоритмам критериального метода.

2. КРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕКАНОНИЧЕСКИХ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Постановка задачи анализа технико-экономических моделей

Математическое трактование анализа технико-экономических моделей сводится к определению условий существования решения задачи вида

$$\min \phi(x), \; x \in X. \qquad (2.1.1)$$

Иными словами, ставится задача определения оптимальной точки $x_0 \in X$, чтобы

$$\phi(x_0) = \min_{x \in X} \phi(x). \qquad (2.1.2)$$

Определение вышеизложенных условий возможно только для определенных подклассов целевых функций допустимых множеств X.

Подкласс функций, который может определять технико-экономические связи в системах электропередачи, представляет собой полином вида:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m_1} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \qquad (2.1.3)$$

где α_{ij} — действительные числа; n — число неизвестных параметров оптимизации; $X = (x_1, x_{2,} x_3, \ldots x_n)$ — вектор пространства X_n.

Ограничения, накладываемые как на отдельные переменные x_j, так и на их комплексы, могут быть представлены также в виде полиномов, аналогичных (2.1.3), выражающихся неравенствами

$$q_k(x) = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \; K = \overline{1, \quad p}, \qquad (2.1.4)$$

$$q_k(x) \le 1, \; K = \overline{1, \quad p}, \qquad (2.1.5)$$

где K — номер ограничения; p — число ограничений;

$m_{k+1}, m_k + 1$ — номер первого и последнего слагаемых *к*-го ограничения.

В системах электропередачи, как правило, ставится задача минимизации целевой функции $y(x)$ с учетом ограничения $q_k(x)$ в положительном октанте $D = \{x : x_j > 0, j = \overline{1,n}\}$ пространства X_n, когда степень трудности задачи $d > 0$.

2.2. Обоснование существования решения задачи

Для получения однозначных решений при известной исходной информации обозначается общее число слагаемых в минимизируемом выражении с учетом ограничений через M.

Степень трудности задачи можно выразить как

$$d = M - n - 1. \tag{2.2.1}$$

Чтобы целевая функция имела в d минимум, при этом минимизирущая точка была единственная и имела хотя бы одно строго положительное решение, $\pi_i > 0$, $i = \overline{1,M}$, необходимо:

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_{ij} \pi_i = 0, \ \ j = \overline{1,n} . \tag{2.2.2}$$

Причем в точке минимума целевой функции должно соблюдаться условие нормализации. Без ограничений

$$\sum_{i+1}^{M} \pi_i = 1. \tag{2.2.3}$$

В задачах с положительной степенью трудности возможно получение однозначного решения. Для этого рассматриваются условия (2.2.2), (2.2.3), когда $\alpha > 0$. При этом расширенная матрица размерностей A_1 имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1M} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2M} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nM} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.4}$$

Какие бы ни были M и n, если только $M-n=\alpha, \alpha>0$, то из прямоугольной матрицы всегда можно выделить квадратную матрицу A_1^1 порядка n+1,

$$A_1^1=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\ \ n+1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\ \ n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n\ \ n+1} \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2.5)$$

Причем, если алгебраические дополнения Δi последней строки матрицы A_1^1 отличны от нуля и имеют один знак, то это равносильно условию существования единственного положительного решения системы линейных уравнений по определению критериев подобия π_i. При этом значения полученных критериев подобия из (2.2.2), (2.2.3)

$$\pi_i\,(i=\overline{1,n+1})$$

выражаются через значения остальных π_{M-n-1} критериев подобия.

Обозначив $\pi_{M-n-1}=\pi_\alpha$ через вспомогательные неизвестные $R\alpha, \alpha=1, M-n-1$. Решение системы уравнений (2.2.2), (2.2.3) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \pi_1=f_1(R_1,R_2,\ldots,R_\alpha) \\ \pi_2=f_2(R_1,R_2,\ldots,R_\alpha) \\ \pi_{n+1}=f_{n+1}(R_1,R_2,\ldots,R_\alpha) \\ \pi_{n+2}=R_1,\pi_{n+3}=R_2,\ldots,\pi_M \end{gathered} \qquad (2.2.6)$$

Приведенные рассуждения и выкладки являются достаточным условием того, что целевая функция имеет в d минимум, так как выделение матрицы A_1^1 и выполнение всех приведенных условий ведет к выделению канонической функции.

По определению

$$y = \frac{A_i}{\pi_i} \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} , \; i = \overline{1, M} . \qquad (2.2.7)$$

Введя подстановку $z_j = \ln x_j, \; Y = -\ln y \;\; a_i = \ln A_i, \; c_i = \ln \pi_i$.

Если существует

$\pi_i = f_i(R_1, R_2, ..., R_\alpha), \;\; i = \overline{1, M},$ то $\ln f_i(R_1, R_2, ..., R_\alpha), \;\; i = \overline{1, M},$
при этом система (2.11) имеет вид

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} Z_j + Y = C_i - a_i , \; i = \overline{1, M} . \qquad (2.2.8)$$

Анализ матрицы A_1^1

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} 1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & ... & \alpha_{mn} 1 \end{pmatrix} \qquad (2.2.9)$$

показывает, что матраца A_1^1 является транспонированной матрицей A_1, значит система из n+1 уравнений имеет единственное положительное решение, причем

$$x_{j0} = x(R_1, R_2, ..., R_\alpha) \, ; \qquad (2.2.10)$$

$$y_0 = y(R_1, R_2, ..., R_\alpha) \qquad (2.2.11)$$

или

$$x_{j0} = \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{A_i}{\pi_i (R_\alpha)} \right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}} ; \qquad (2.2.12)$$

$$y(x_0) = \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{A_i}{\pi_i (R_\alpha)} \right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}} , \qquad (2.2.13)$$

где Δij — алгебраические дополнения элементов, принадлежащих i-й строке и j-му столбцу матрицы A_1'', имеют вид

$$A_1'' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n+1}1 & \alpha_{n+2}1 & \ldots & \alpha_{n+1n}1 \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

Оставшиеся $M-n-1$ нелинейных уравнений системы (2.2.12) называются уравнениями связи и должны удовлетворять решению (2.2.13), (2.2.14), так как число уравнений связи совпадает с числом неизвестных критериев подобия $R_1, R_2, \ldots, R_\alpha$.. Кроме того, полученная система имеет решение, так как выше указывалось, что функция имеет условный минимум.

В общем виде система связи имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \ln \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{A_i}{\pi_i(R_\alpha)} \right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}} - \ln \prod_{i=1}^{n+1} \left[\frac{A_i}{\pi_i(R_\alpha)} \right]^{\frac{\Delta ij}{\Delta}} - \ln \frac{R_\alpha}{A_k} = 0,$$

$$K = \overline{M-n-1, M}\,; \quad (2.2.15)$$

$$\alpha = \overline{1, M-n-1}\,.$$

Полученные значения корней системы связи должны находиться в промежутках

$$0 \le \alpha_\alpha \le R_\alpha \le \beta_\alpha \le 1 \quad \alpha = 1, \overline{1, M-n-1}, \quad (2.2.16)$$

где α_α и R_α — нормированные границы промежутков, определяемые из условия

$$\pi \ge \quad , \; i = \overline{1, M}. \quad (2.2.17)$$

В противном случае нарушается условие нормализации и ортогональности (2.2.2), (2.2.3).

Решение технико-экономических задач с ограничениями вида

$$q_k(x) = \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha ij} \le 1, \; k = \overline{1, p} \quad (2.2.18)$$

сводится к нахождению условного минимума функции Лагранжа:

$$L(x,\mu)=y(x)+\sum_{k=1}^{p}\mu_{k0}\left[q_k(x)-1\right], \qquad (2.2.19)$$

где $L(x,\mu)$ — функция Лагранжа; $y(x)$ — целевая функция; μ_{k0} — неопределенные множители Лагранжа; q_k — k-е ограничение.

Необходимым условием существования точки минимума $X_о$ функции (2.2.19) является равенство нулю всех частных производных функции Лагранжа по независимым переменным X_j

$$\frac{\partial L(x,\mu)}{\partial x_j}=0. \qquad (2.2.20)$$

кроме того, в точке X_0 функции Лагранжа выражение $q_k(x)-1=0$, $\mu_{k0}>0$. В этом случае говорят об активных ограничениях, влияющих на точку минимума. Если $q_k(x)-1<0$, $\mu_{k0}=0$, то ограничение не активно, оно не влияет на условный минимум функции $y(x)$. В дальнейшем предполагается, что ограничения активны.

Раскрывая (2.2.20), сохранив прежнее условие нормализации,

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{M}\alpha_{ij}\pi_i,\ j=\overline{1,n}\\ \sum_{i\in I_0}\pi_i=1\end{cases}. \qquad (2.2.21)$$

$$A_1^1=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1m_1} & \ldots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2m_1} & \ldots & \alpha_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n_1} & \alpha_{n_2} & \ldots & \alpha_{nm_1} & \ldots & \alpha_{nm}\\ \underbrace{1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots \quad 0}_{m_1} \end{pmatrix} \qquad (2.2.22)$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно записывать выражения для критериев подобия π_i через вспомогательные критерии R_α:

$$\pi_i = f(R_\alpha), \quad \alpha = \overline{1, M-n-1}. \qquad (2.2.23)$$

Для определения значений параметров X_j в точке условного минимума рассматривается система:

$$y = \frac{A_i}{\pi_i}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \; i \in I_0;$$

$$1 = \frac{A_i}{\pi_i}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}}, \; i \in I_k. \qquad (2.2.24)$$

Сделав аналогичную замену переменных, записывают, что

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} Z_j + Y = c_i - a_i, \; i \in I_0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} Z_j = c_i - a_i, \; \begin{matrix} i \in I_k \\ k \in K, \end{matrix} \qquad (2.2.25)$$

откуда, соответственно, определяют параметры оптимизации:

$$x_{j0} = \prod_{i=1}^{n+1}\left[\frac{A_i}{\pi_i(R_\alpha)}\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \qquad (2.2.26)$$

$$x(x_0) = \prod_{i=1}^{n+1}\left[\frac{A_i}{\pi_i(R_\alpha)}\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}, \qquad (2.2.27)$$

где $j = \overline{1, n}$; $A_i = \begin{cases} C_i, i \in I_0 \\ \lambda_k C_i \end{cases}$ для остальных i λ_k — нормирующие множители Лагранжа.

Рассуждения относительно оставшейся системы связи из $M - n - 1$ уравнения — аналогичные.

Замечание. Выделение канонической функции не является необходимым условием, а только достаточным для минимизации полиномов, так как есть функции, имеющие минимальное значение, но в них невозможно выделить каноническую функцию: например, функция $\phi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1^{-1} + x_2^{-1}$ имеет в d единственную точку минимума, но из нее нельзя выделить канонической функции от двух переменных.

2.3. Алгоритм расчета параметров оптимизации в неканонических моделях

На основании полученных результатов предлагается следующий алгоритм определения параметров оптимизации в задачах с положительной степенью трудности, использующих вектор вспомогательных параметров *R:*

1. В зависимости от условий задачи и ограничений, присутствующих в задаче, составить систему уравнений вида (2.2.2), (2.2.3) или систему (2.2.21). В качестве действительных переменных взять критерии подобия π_i.
2. Решить сформированную систему уравнений, полученное решение которой имеет вид (2.2.6), так как система однозначно не разрешима.
3. Для определения вектора вспомогательного параметра *R* решить систему уравнений связи (2.2.15) при заданной исходной формации, входящей в коэффициенты целевой функции A_i.
4. Для однозначного определения критериев подобия π_i при заданной исходной информации после выполнения пункта 3 вернуться к пункту 2 и определить значения критериев подобия $\pi_i(R_\alpha)$.
5. Определить значения параметра оптимизации по следующим выражениям (2.2.12), (2.2.13).

При решении задачи с функциональными ограничениями значения параметров оптимизации находятся с помощью выражений (2.2.26), (2.2.27).

2.4. Пример реализации алгоритма расчета параметров оптимизации

В качестве примера, который показывает, как работает данный алгоритм, рассматривается задача определения оптимальной мощности ТП в ЭЭС с учетом выявления оптимальных параметров распределительных сетей до 1000 и свыше 1000 В.

Пусть необходимо минимизировать функцию цели, представляющую собой следующее:

$$З_1 = f(P_m, \sigma, m). \tag{2.4.1}$$

Функциональная связь параметров и затрат представляет собой вид:

$$З_1 = \frac{A_1^{'}}{P_{Tn}} + \frac{A_3^{'}}{\sqrt{P_{Tn}}\sqrt[4]{\sigma}} + \frac{A_4^{'}\sqrt{m}}{\sigma} + \frac{A_5^{'}\sqrt{m}F}{\sigma} + \frac{A_6^{'}P_{Tn}^2}{m\sqrt{m}\sigma F} + A_2^{'}, \tag{2.4.2}$$

где P_{Tn} — нагрузка ТП; m — количество отходящих линий до 1000 В; F — сечение провода в сетях до 1000 В; $A_1^{'}, A_2^{'}, A_3^{'}, A_4^{'}, A_5^{'}, A_6^{'}$ — обобщенные константы, определяемые технико-экономическими показателями сети; σ — поверхностная плотность нагрузки, тыс., кВт/км.

В соответствии с методом критериального программирования в исследуемых полиномах, вторая составляющая выражения (2.4.2) не участвует в процессе оптимизации, а влияет только на конечный результат. Тогда при σ = const

$$З = З_1 - A_2^{'} \tag{2.4.3}$$

и

$$З = A_1 P_m^{-1} + A_3 P_{Tn}^{-0,5} + A_5 m^5 F + A_6 P_{Tn}^2 m^{-\frac{3}{2}} F^{-1}, \tag{2.4.4}$$

где $A_1 = A_1^{'}; A_2 = A_2^{'}; A_3 = A_3^{'}\sigma^{-\frac{1}{4}}; A_4 = A_4^{'}\sigma^{-1}; A_5 = A_5^{'}\sigma^{-1}; A_6 = A_6^{'}\sigma^{-1}.$

Исходя из (2.4.4), можно сказать, что степень трудности задачи $\alpha = 1$ заключается в качестве неизвестных переменных $P_{тп}$,

m, F, которые ранее расшифровывались. Согласно (2.2.2), (2.2.1) составляется система линейных уравнений относительно критериев подобия π_i:

$$\begin{aligned}
&-\pi_1-\frac{1}{2}\pi_2+0+0+2\pi_5=0;\\
&0+0+\frac{1}{2}\pi_3+\frac{1}{2}\pi_4-\frac{3}{2}\pi_5=0;\\
&0+0+0+\pi_4+\pi_5=0;\\
&\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5=1.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Тогда критерии подобия из (2.4.5) и при α=1 выражаются:

$$\pi_1=8R-1,\pi_2=2-12R,\pi_3=2R,\pi_4=\pi_5=R$$

Исходя из того, что критерии подобия не отрицательные числа, $\pi_i\geq 0$, следует, что

$$\frac{1}{8}\leq R\leq\frac{1}{6}. \tag{2.4.6}$$

Далее из (2.2.7) и (2.2.8) определяются значения параметров оптимизации в функции критерия R

$$\begin{aligned}
&(8R-1)3=A_1P_{Tn}^{-1};\\
&(2-12R)3=A_3P_{Tn}^{-\frac{1}{2}};\\
&2R3=A_4m^{\frac{1}{2}};\\
&R3=A_5m^{\frac{1}{2}}F;\\
&R3=A_6P_{Tn}^{2}m^{-\frac{3}{2}}F^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Из (2.4.7) имеем:

$$F_0=\frac{1}{2}A_4A_5^{-1}; \tag{2.4.8}$$

$$P_0 = \left(\frac{2 - 12R}{8R - 1} \right)^2 A_1^2 A_3^{-2}, \text{ при } R \neq \frac{1}{8}; \qquad (2.4.9)$$

$$m_0 = A_1^{-2} A_3^4 A_4^{-2} \frac{4R^2(8R-1)}{(2-12R)}, \text{ при } R \neq \frac{1}{6}, \qquad (2.4.10)$$

где уравнение связи имеет вид:

$$\frac{R^4(8R-1)^6}{(2-12R)^{10}} = A_1^8 A_3^{-12} A_4^2 A_5 A_6 \qquad (2.4.11)$$

Пусть A_1 = 852 отн.ед/год; A_1 = 0,811 отн.ед/кВт. час;

A_1 = 235; A_1 = 5,85 10^3; A_1 = 38,5; A_1 =34,6.

Решив уравнение связи (2.4.11) согласно приведенной выше исходной информации — R = 0,1642.

Зная R, можно найти значения интересующих параметров при определенной исходной информации из (2.4.8), (2.4.9), (2.4.10).

2.5. Экономическая устойчивость неканонических технико-экономических моделей

При решении технико-экономических задач методом критериального программирования одной из важных характеристик является экономическая устойчивость целевой функции в окрестностях точки минимума.

Если при больших изменениях параметров оптимизации целевая функция изменяется несущественно от своего минимального значения, то говорят, что целевая функция обладает большой устойчивостью, и наоборот, значительное изменение целевой функции при малых изменениях параметров свидетельствует о небольшой устойчивости.

Определение устойчивости целевой функции играет немаловажную роль в процессе отыскания и анализе наиболее целесообразной области решения.

Во-первых, по крутизне изменения целевой функции, зависящей от вменения параметров, можно подходить с большей или меньшей точностью к определению самих параметров оптимизации. Если функция устойчива к изменению параметра оптимизации, то в решение задачи, обычно, активно включаются технические условия, позволяющие конкретизировать задачу. Если функция не устойчива, то необходимо тщательно подходить к определению параметров оптимизации, которые в свою очередь зависят от исходной информации, заключенной в обобщенных постоянных A_i.

Во-вторых, практическое определение минимального значения функции возможно только с определенной точностью, зависящей от точности задания исходной информации, выражаемой в виде обобщенных коэффициентов, или от точности всей модели в целом. Величину точности модели обычно задают. Заданной величине погрешности функции соответствует область изменения параметров оптимизации, считающихся оптимальными в данном случае, так как любые изменения внутри этой области, области устойчивости, не могут уточнить значение целевой функции.

В-третьих, при определении параметров оптимизации предполагают, что параметры — это непрерывные переменные. В ряде случаев такие параметры носят дискретный характер, определяемый шкалой оборудования или природой исследуемой величины. Наличие таких технических условий искажает решение задачи, так как строго не удается выбрать стандартное значение, которое лежало бы в зоне устойчивости решения.

Прямая задача определения устойчивости предполагает определение относительного изменения целевой функции при отклонении параметров оптимизации от своих минимальных значений.

Обратная задача определения устойчивости заключается в определении области допустимых значений параметров оптимизации, граница этой области определяется исходя из допустимой погрешности целевой функции.

Определение границ областей равноэкономичности дня канонических функций вида:

$$\underset{*}{y} = \sum_{i=1}^{n+1} \pi_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} . \qquad (2.5.1)$$

Граница области определяется из уравнения

$$\underset{*}{y} = 1 + \varepsilon , \qquad (2.5.2)$$

где ε – заданная программированная точность расчета.

Аппроксимируя функцию (2.5.1) в окрестностях точки минимума рядом Тейлора, определяют интервалы устойчивости параметров оптимизации.

Определяя границу устойчивости каждой канонической составляющей, ищут огибающую границ всех составляющих. Этот метод предполагает приближенное решение задачи при неизвестной исходной информации.

Как уже неоднократно отмечалось, весьма актуально определение области устойчивости параметров неканонических функций при $\alpha > 0$.

Из предыдущего параграфа известно, что возможно однозначное определение критериев подобия при наличии определенной исходной информации об A_i, причем диапазон решений задачи по определению как критериев подобия, так и параметров оптимизации зависит от диапазона изменения критериев

$$R_1, R_2, ..., R_\alpha, \ \ \alpha = \overline{1, M - n - 1} . \qquad (2.5.3)$$

Причем наложенные ограничения в ходе решения задачи на критерии $R_1, R_2, ..., R_\alpha,$ позволяют строго нормировать интервалы их изменения

$$R_\alpha \in (\alpha_\alpha, \beta_\alpha) \alpha = \overline{1, M - n - 1} . \qquad (2.5.4)$$

Каждому значению из нормированного интервала соответствует вполне определенное решение задачи, а само значение параметра внутри этого промежутка определяется исходной информацией, и целевую функцию (2.1.3) в критериальной форме можно записать следующим образом:

$$\underset{*}{y}(R_\alpha)=\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i(R_\alpha)\prod_{j=1}^{n}\underset{*}{x}_j^{\alpha_{ij}},\ \alpha=\overline{1,M-n-1}. \qquad (2.5.5)$$

Из (2.5.5) следует, что при изменении параметров в каком-то интервале получается множество гиперповерхностей, имеющее одну общую точку минимума $\underset{*}{y}_0=1,\ \underset{*}{x}_{j0}=1$.

Граница области экономичности находится из условия, что функция (2.5.5) аппроксимирована членами второго порядка разложения Тейлора в точке минимума. В этом случае имеет место приближенное равенство:

$$\underset{*}{y}\left(R_\alpha\right)\approx 1+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}B_{ij}(R_\alpha)(\underset{*}{x}_{j-1})(\underset{*}{x}_{i-1}), \qquad (2.5.6)$$

где

$$B_{ij}(R_\alpha)=\frac{1}{\underset{*}{x}_i^2}\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{pi}(\alpha_{pi}-1)\prod_{S=1}^{n}\underset{*S}{x}_i^2= \qquad (2.5.7)$$

$$=\sum_{P=1}^{M}\alpha_{pi}^2\pi_p(R_\alpha)-\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{pi},$$

если $i=j$.

$$B_{ij}(R_\alpha)=\frac{1}{\underset{*}{x}_i\underset{*}{x}_j}\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{pi}\alpha_{pj}\prod_{S=1}^{n}\underset{*S}{x}_i{}^{s^{\alpha ps}}= \qquad (2.5.8)$$

$$=\sum_{P=1}^{M}\alpha_{pi}\alpha_{pj}\pi_p(R_\alpha),$$

если $i\neq j$.

Вторая сумма (2.5.7) равная, так как она является первой производной функции (2.5.5) в точке минимума:

$$y(\underset{*}{R}_{\alpha})=\frac{1}{\underset{*}{x_i}}\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{p_i}\prod_{S=1}^{n}\underset{*}{x_i}s^{\alpha ps}=\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{p_i}=0.$$

Поэтому выражение для коэффициента $B_j\,(R_\alpha)$ примет следующий вид:

$$B_{ij}(R_\alpha)=\sum_{P=1}^{M}\pi_p(R_\alpha)\alpha_{p_i}\alpha_{p_j},\ \ i,j=\overline{1,n}. \qquad (2.5.9)$$

Далее, из (2.5.6) и (2.5.9):

$$y(\underset{*}{R}_{\alpha})=1+\frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n}B_{ij}(R_\alpha)(\underset{*}{x_j}-1)(\underset{*}{x_i}-1). \qquad (2.5.10)$$

Введя новые переменные

$$\xi_i=\underset{*}{x_i}-1; \qquad (2.5.11)$$

$$\xi_j=\underset{*}{x_j}-1; \qquad (2.5.12)$$

$$\varepsilon=y(\underset{*}{R}_{\alpha})-1. \qquad (2.5.13)$$

Граница области экономичности для любого значения параметров определяется уравнением

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}B_{ij}(R_\alpha)\xi_i\xi_j=2\varepsilon. \qquad (2.5.14)$$

В этом случае квадратичная форма (2.5.14) положительно определенная. Для этого, исходя из критерия Сильвестра, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$B_{11}(R_\alpha)>0,\begin{vmatrix}B_{11}(R_\alpha) & B_{12}(R_\alpha)\\ B_{21}(R_\alpha) & B_{22}(R_\alpha)\end{vmatrix}>0,\dots,\det\left[B_{ij}(R_\alpha)\right]>0. \qquad (2.5.15)$$

Рассмотрим расширенную матрицу размерностей $A_1^{'}$ функции (2.1.3)

$$A_1^{'}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}1\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \ldots & \alpha_{Mn}1\end{pmatrix}. \qquad (2.5.16)$$

Критерии подобия $\pi_i(R_\alpha)$ определены из условия, что базис матрицы $A_1^{'}$, расположенный в левом верхнем углу порядка «n+1», отличен от 0. Минор более высокого порядка равен 0. В силу теоремы о базисном миноре матрица $A_1^{'}$ имеет (n+1) базисных столбцов, которые линейно независимы, а следовательно линейно независимо n столбцов матрицы размерностей $A\equiv(\alpha_{ij})$, полученной из матрицы $A_1^{'}$, вычеркиванием столбца, составленного из единиц. Тогда определители (2.5.16), являющиеся определителями Грат для столбцов границы A, положительны.

Следовательно, квадратичная форма левой части выражения (2.5.14) положительно определена, а само уравнение (2.5.14) определяет множество эллипсоидов, конкретные границы которых определены для конкретных значений параметров $R_\alpha, M-n-1$ и имеют центр в точке $\underset{*}{x_j}=1$.

2.6. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Согласно вышеизложенному квадратичная форма положительно определена:

$$B(x,x)=\sum_{i=j=1}^{n} B_{ij}R_\alpha\xi_i\xi_j. \qquad (2.6.1)$$

Следовательно, исходя из метода Лагранжа, с помощью невырожденных преобразований можно привести ее к каноническому виду:

$$B(x,x) = \lambda_1(R_\alpha)\eta_1^2 + \lambda_2(R_\alpha)\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n(R_\alpha)\eta_n^2, \qquad (2.6{,}2)$$

где B (x,x) — квадратичная форма; λ — коэффициент каноничности; η — новые переменные.

Значение λ можно получить из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} B_{11}(R_\alpha)-\lambda_1 & B_{12}(R_\alpha) & B_{13}(R_\alpha) & \ldots & B_{1n}(R_\alpha) \\ B_{21}(R_\alpha) & B_{22}(R_\alpha)-\lambda_2 & B_{23}(R_\alpha) & \ldots & B_{2n}(R_\alpha) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1}(R_\alpha) & B_{n2}(R_\alpha) & B_{n3}(R_\alpha) & \ldots & B_{nn}(R_\alpha)-\lambda_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.6.3)$$

Решение (2.6.3) зависит от коэффициентов $B_{ij}(R_\alpha)$.

При неизвестной исходной информации об A_i значения параметров (R_α) можно оценить из интервалов изменения, полученных из (2.5.15), (2.5.16). Для того, чтобы оценить возможные границы гиперэллипсоидов не зависимо от исходной информации, задаемся

$$R_\alpha = \alpha_\alpha, R_\alpha = \beta_\alpha,$$

где α_α — минимальное значение из интервала изменения;
$\alpha_\alpha, \beta_\alpha$ — максимальное значение из того же интервала.

Равенство $R_\alpha = \alpha_\alpha, R_\alpha = \beta_\alpha$ возможно, если неканоническую модель можно разложить на канонические модели, причем выражения этих канонических составляющих определяют верхнюю или нижнюю границы возможных изменений неканонической функции, что справедливо при сделанных допущениях по аппроксимации рядом Тейлора.

Например, для неканонической функции

$$\underset{*}{y} = \pi_{1*}^{x^8} + \pi_{2*}^{x} + \pi_{3*}^{x^{-\frac{3}{2}}} \qquad (2.6.4)$$

верхнюю и нижнюю границы можно записать как

$$\underset{*}{y_1} = 0{,}159_*^{x^8} + 0{,}841_*^{x^{-\frac{3}{2}}}; \qquad (2.6.5)$$

$$y_{2_*} = 0,6^{x}_{*} + 0,4^{x^{-\frac{3}{2}}}_{*}. \qquad (2.6.6)$$

В общем случае значение осей гиперэллипсоидов определяются формулой, полученной из (2.6.3)

$$a_i(R_\alpha) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda_i(R_\alpha)}} . \qquad (2.6.7)$$

При решении задачи с активными ограничениями граница области экономической устойчивости определяется уравнением

$$2\varepsilon = 2\sum_{i=1}^{n} B_i(R_\alpha)\xi_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_i(R_\alpha)\xi_i\xi_j , \qquad (2.6.8)$$

где $B_i(R_\alpha)$ — первые частные производные функции в точке условного минимума.

$$B_{ij}(R_\alpha) = \frac{1}{x_{i_*}} \sum_{P=1}^{M} \pi_p(R_\alpha)\alpha_{pi} \prod_{S=1}^{n} x_s^{\alpha ps} = \sum_{P=1}^{M} \pi_p(R_\alpha)\alpha_{pi} .$$

Из (2.6.8) видно, что формула представляет собой не что иное, как общее выражение для гиперповерхностей второго рода, где

$(2\sum_{i=1}^{n} B_i(R_\alpha)\xi_i - 2\varepsilon)$ — линейная часть.

Рассмотрим матрицы

$$B_1(R_\alpha) = \begin{pmatrix} B_{11}(R_\alpha) & B_{12}(R_\alpha) & ... & B_{1n}(R_\alpha) \\ B_{21}(R_\alpha) & B_{22}(R_\alpha) & ... & B_{2n}(R_\alpha) \\ ... & ... & ... & ... \\ B_{n1}(R_\alpha) & B_{n2}(R_\alpha) & ... & B_{nn}(R_\alpha) \end{pmatrix}$$

и

$$B_2(R_\alpha)=\begin{pmatrix} B_{11}(R_\alpha) & B_{12}(R_\alpha) & \dots & B_{1n}(R_\alpha) \\ B_{21}(R_\alpha) & B_{22}(R_\alpha) & \dots & B_{2n}(R_\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1}(R_\alpha) & B_{n2}(R_\alpha) & -2\varepsilon & \end{pmatrix} \qquad (2.6.9)$$

Пусть определение первой будет $\alpha etB_1(R_\alpha)$, а второй $\alpha etB_2(R_\alpha)$.

Для определения интервалов устойчивости необходимо определить величину полуосей $a_k, k=\overline{1,n}$ гиперповерхности второго порядка.

Тогда определим полуоси гиперэллипсоида как

$$\left|\frac{\alpha etB_1}{\alpha etB_2}\right|\lambda_2(R_\alpha)=\frac{2\varepsilon}{Q_k^2(R_\alpha)}, k=\overline{1,p} : p=n\,. \qquad (2.6.10)$$

Откуда

$$a_k(R_\alpha)=\sqrt{\left|\frac{\alpha etB_1}{\alpha etB_2}\right|\cdot\frac{2\varepsilon}{\lambda_2(R_\alpha)}}\,. \qquad (2.6.11)$$

Используя изложения в 2.2, возможно определение интервалов равноэкономичности с учетом всего диапазона изменения параметров (R_α).

Пример. Определение интервалов равноэкономичности для параметров оптимизации $P_{ТП}$, m, F — полученных в разделе 2.4.

Сделаем замену переменных $\xi_1 =_{*}^{P_{ТП}-1}$, $\xi_2 =_{*}^{m-1},_{*}^{F-1}$.Значения критериев подобия в функции дополнительного параметра R определены следующим образом:

$$\pi_1=8R-1;\;\; \pi_2=2-12R;\;\; \pi_3=2R;\;\; \pi_4=\pi_5=R\,.$$

Значения параметра R лежат в интервале

$$\frac{1}{8}\le R\le\frac{1}{6}\,.$$

Согласно выражения (2.5.9) определим матрицу коэффициентов при граничных значениях R_{α}.

$$(B_{ij})_{R=\frac{1}{8}}=\begin{pmatrix} \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \qquad (2.6.12)$$

$$(B_{ij})_{R=\frac{1}{6}}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad (2.6.12)$$

где прямоугольная матрица размерностей задачи (2.4.4)

$$\alpha_{ij}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.14)$$

Для определения характера чисел λ_i необходимо решить следующее уравнения:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{5}{8}-\lambda_1\right) & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \left(\frac{3}{8}-\lambda_i\right) & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \left(\frac{5}{8}-\lambda_i\right) \end{vmatrix}_{R_\alpha} = 0; \qquad (2.6.15)$$

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda_1) & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & (\frac{1}{2}-\lambda_2) & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & (\frac{1}{3}-\lambda_3) \end{vmatrix}_{R=\frac{1}{3}} = 0. \qquad (2.6.16)$$

В первом случае получим значения λ:

$$\lambda_1 = 0,065;\ \lambda_2 = 0,165;\ \lambda_3 = 0,270.$$

Зададимся величиной максимального отклонения затрат ε. Пусть, например, $\varepsilon = 0,05$. Тогда в каждом из соответствующих случаев определим значения главных осей из (2.6.7):

1. $\alpha_1 = 1,240$, $\alpha_2 = 0,779$, $\alpha_3 = 0,609$.

2. $\alpha_1 = 1,028$, $\alpha_2 = 0,633$, $\alpha_3 = 0,370$.

Выберем из этих двух случаев первый, которому соответствуют больше значения главных осей эллипсов. Тогда можно принять, что максимально возможные интервалы устойчивости следующие:

$$0,480 <_{*}^{P_{\text{ТП}}} < 1,620;$$

$$0,611 <_{*}^{m} < 1,389;$$

$$0,696 <_{*}^{F} < 1,304.$$

Оценим величину погрешности Δ_i, возникающую в каждом конкретном случае и для каждого параметра $\underset{*}{P_{\text{ТП}}}, \underset{*}{m}, \underset{*}{F}$:

$$\Delta_i = \left| \frac{a_{i1} - a_{i2}}{2} \right|. \qquad (2.6.17)$$

Соответственно $\Delta P_{\text{ТП}} = 0{,}106$; $\Delta \underset{*}{m} = 0{,}073$; $\Delta \underset{*}{F} = 0{,}114$.

2.7. Исследование чувствительности решения неканонических задач во времени

Поскольку время является фактором развития ЭЭС, то представляет большой интерес анализ чувствительности решения неканонических задач по времени.

Рост электрических нагрузок ставит проблему выбора оптимальных способов развития существующих ЭЭС. То есть решение оптимизационных задач должно не только определять экономически целесообразные параметры системы электропередачи на сегодняшний день, но также должна учитываться перспектива развития ЭЭС, которая определяется прогнозируемым ростом электрических нагрузок.

В настоящее время в мировой практике используются следующие методы прогнозирования:

— прямой счет (нормативные методы);
— методы выравнивания динамических рядов (методы формальной экстраполяции);
— корреляционные методы;
— компаративные методы (методы сравнения, аналогий);
— методы экспертной оценки.

Выбор методов прогнозирования на различные периоды (5–7, 10–15, 20–30 лет) зависит от наличия и достоверности исходной информации о влияющих факторах, особенно о развитии новых технологий и процессов.

На период 5–7 лет имеется достаточно полная информация. Вероятность появления неизвестных качественно новых технологий невелика, поэтому могут использоваться нормальные и корреляционные методы, а также методы экстраполяции на средний и дальний периоды. С течением времени, когда достоверность информации уменьшается, применяются укрупненные показатели и число используемых методов сокращается.

Практика показала, что относительный рост электропотребления не равняется единице (абсолютный прирост не равен нулю), поэтому функция, используемая для экстраполяции, должна быть возрастающей и удовлетворять условию:

$$\frac{y_{t+1}}{y_t} > 1, \text{ при } t \to \infty . \tag{2.7.1}$$

Из практики также известно, что темпы роста электропотребления не остаются неизменными во времени. Темп роста экспоненциальной функции при изменении времени t не остается постоянным, а изменяется в функции от времени, а это значит, что он может как нарастать, так и уменьшаться.

При решении технико-экономических задач в системах электропередачи методом критериального программирования определяются экономически целесообразные значения параметров оптимизации и функции (см. выражения 2.2.12 и 2.2.13):

$$x_{j0} = x(R_\alpha, A_i);$$

$$y_0 = y(R_\alpha, A_i), \tag{2.7.2}$$

где A_i — обобщенные константы, несущие определенную исходную информацию; R_α – критерии подобия, определяемые из уравнений связи и зависящие от исходной информации.

Интерес представляет рассмотрение динамического процесса, связанного с изменением оптимальных параметров.

В ряде случаев исходная информация, участвующая в (2.2.12), (2.2.13) в виде обобщенных констант A_i , изменяется во времени.

Если представить исходную информацию в функции времени, то выражения (2.2.12) и (2.2.13) будут иметь вид

$$x_{j0}(t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[A_i(t)/\pi_i(R_\alpha)\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \qquad (2.7.3)$$

$$y(x_0,t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[A_i(t)/\pi_i(R_\alpha)\right]^{\frac{\Delta ij}{\Delta}}. \qquad (2.7.4)$$

Выделение обобщенных констант, зависящих в свою очередь от времени *t*, не предполагает введение нового параметра оптимизации и исходной целевой функции, поскольку ставится задача определения чувствительности параметров оптимизации времени. Это позволит учитывать темпы роста нагрузок при проектировании ЭЭС, то есть предсказать, какими должны быть экономически целесообразные параметры электроснабжения через определенное количество лет.

Для анализа чувствительности значение параметров и функции X к изменению исходных данных A_i допустимо выразить относительные их значения через относительные значения коэффициентов A_i:

$$\underset{*}{x_{j0}}(t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}/\underset{*}{\pi_i}(R_\alpha)\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \qquad (2.7.5)$$

$$y(\underset{*}{\underset{*}{x_0}},t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}/\underset{*}{\pi_i}(R_\alpha)\right]^{\frac{\Delta ij}{\Delta}}, \qquad (2.7.6)$$

где $\underset{*}{A_i}(t)=\dfrac{A_i(t)}{A_{i\delta}(t)};\underset{*}{\pi_i}(R_\alpha)=\pi_i(R_\alpha)/\pi_{i\delta}(R_\alpha).$

Для канонических моделей выражения (2.7.5), (2.7.6) принимают следующий вид:

$$\underset{*}{x_{j0}}(t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}(t)\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \qquad (2.7.7)$$

$$y(\underset{*}{x_0},t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}(t)\right]^{\frac{\Delta i}{\Delta}}. \qquad (2.7.8)$$

Полученные выражения как для неканонических, так и для канонических моделей позволяют проследить изменение целесообразных значений параметров во времени.

Пример. Проанализируем чувствительность параметров к изменению исходной информации, зависящей от времени. Целевая функция затрат имеет вид:

$$З = A_1x_1x_2^{-1} + A_2x_1^2x_2^{-2} + A_3x_1^{-2} + A_4x_2. \qquad (2.7.9)$$

Пусть коэффициенты A_1 и A_2 зависят от времени следующим образом:

$$A_1=\frac{A_1^{'}}{p}, A_1=\frac{A_2^{'}}{p},$$

где p — функция изменения плотности нагрузки.

P изменяется по закону:

$$P=P_0(1+q)^t, \qquad (2.7.10)$$

где q — ежегодный прирост мощности $q = 8\div10\%$

P_0 — начальная плотность нагрузки, P_0 = 50 кВт/км².

Решение (2.7.9) дает следующие выражения для параметров оптимизации и затрат:

$$x_{1э}=A_3^{\frac{1}{2}}, A_4^{-\frac{1}{2}};$$

$$x_{2э}=\left[3R/(1-2R)\right]A_1^{-1}A_2A_3^{\frac{1}{2}}A_4^{-\frac{1}{2}}; \qquad (2.7.11)$$

$$З_э=18R\cdot\frac{A_1^{-1}A_2A_3^{\frac{1}{2}}A_4^{\frac{1}{2}}}{(2-R)(1-2R)},$$

где $R\in(0;\frac{1}{2})$ и появление его внутри интервала зависит от исходной информации A_i.

В относительных единицах (2.7.11) имеет вид:

$$\underset{*}{x}_{1э} = \underset{*}{A}_3^{\frac{1}{2}}\,\underset{*}{A}_4^{-\frac{1}{2}}\,;$$

$$\underset{*}{x}_{2э} = 3\underset{*}{R}\cdot \underset{*}{A}_1^{-1}\,\underset{*}{A}_2\,\underset{*}{A}_3^{\frac{1}{2}}\,\underset{*}{A}_4^{-\frac{1}{2}}\,; \qquad (2.7.12)$$

$$\underset{*}{З}_э = 18\underset{*}{R}\cdot \underset{*}{A}_1^{-1}\,\underset{*}{A}_2\,\underset{*}{A}_3^{\frac{1}{2}}\,\underset{*}{A}_4^{-\frac{1}{2}} / (2-\underset{*}{R})(1-2\underset{*}{R}),$$

где

$$\underset{*}{R} = \frac{R}{R_\delta}, (1-2R) = (1-2\underset{*}{R}) / (1-2R_\delta), (2-\underset{*}{R}) = (2-R) / (1-2R_\delta),$$

где R_δ – корень уравнения связи при базисных значениях коэффициентов $A_{i\delta}$.

При решении (2.7.9) с ограничением по параметру получены следующие выражения:

$$x_{10} = A_1 A_2^{-1} x_2 (2-3\lambda) / 4\lambda;$$

$$З_0 = A_1 A_2^{-1} x_2 (2-3\lambda) / 4\lambda. \qquad (2.7.13)$$

3. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ В ЗАДАЧАХ КРИТЕРИАЛЬНОГО МЕТОДА

Реализация неканонических моделей в определенной степени зависит от степени трудности задачи. В большинстве случаев на практике приходится сталкиваться с многопараметрическими нелинейными задачами. Анализ устойчивости решения таких задач усложняется еще и тем, что аппроксимируется исходная функция в окрестностях точки минимума, что ведет к определенным неточностям.

3.1. Критериальный анализ технико-экономических моделей с использованием алгоритмов линейного программирования

Одним из важных аспектов решения технико-экономических задач положительной степени трудности является наличие достоверной информации, а также простота вычислительных алгоритмов, позволяющая реализовать ту или иную модель с минимальными затратами времени и средств.

На сегодняшний день наиболее разработанными алгоритмами остаются алгоритмы линейного программирования. В связи с этим предлагается решение технико-экономических задач положительной степени трудности, использующее алгоритмы линейного программирования. При этом в качестве исходных использованы модели, представленные в критериальной форме и имеющие вид:

$$Y_{(x)} = \sum_{i=1}^{m} A_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \quad . \qquad (3.1.1)$$

Для решения задачи минимизации Y (3.1.1) с целью выявления как экономической соразмерности, так и параметров оптимизации в задачах с положительной степенью трудности использовался прием искусственного уменьшения степени трудности за счет аппроксимации отдельных составляющих или целой совокупности составляющих целевой функции, что уменьшило величину α или, наоборот, — увеличило α при введении дополнительных условий.

В определенной мере методы линейного програмирования оправданы, если вновь полученная модель после аппроксимации будет адекватна исходной модели. Последнее условие не всегда возможно выполнить, так как погрешность аппроксимации в отдельных случаях превышает допустимую величину. Поэтому представляет интерес применение методов решения задач положительной степени трудности, используя в решении исходную модель объекта оптимизации. Один из способов позволяет свести задачу нелинейного программирования к многошаговой задаче линейного программирования с целью выявления критериев подобия π_i, которые соответствуют минимальному и максимальному значению линейной формы.

Общая формулировка задачи выглядит следующим образом, предполагая, что значения переменной $\dot{x}$ непрерывны в окрестностях точки минимума и равны:

$$\dot{x}_j = 1 \pm \delta_j. \tag{3.1.2}$$

В данном случае используется симметричное расположение δ — окрестности параметров оптимизации, так как значения δ_i в каждом конкретном случае задаются априори или ищутся опытным путем.

Из (3.1.1) и (3.1.2) можно записать

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \prod_{j=1}^{n} (1 \pm \delta_j)^{\alpha_{ij}} = C_i, i = \overline{1, m_1}\ . \tag{3.1.3}$$

Тогда целевая функция примет вид:

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m1} C_i \pi_i\ . \tag{3.1.4}$$

В качестве линейных ограничений применяются условия ортогональности и нормализации

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{ij}\pi_i = 0, \;\; j = \overline{1,n} \,. \tag{3.1.5}$$

Таким образом, принятые ограничения для целевой функции X предполагают использование линейных программ.

Обобщая выражения (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), формулируется задача в терминах линейного программирования, где в качестве переменных выступают критерии подобия

$$\min(\max) < C, \pi;$$

$$\pi \in S_0, \tag{3.1.7}$$

где $S_0 = \{\pi : A\pi = b, \pi \geq 0\}$.

В выражении (3.1.7) присутствуют коэффициенты S_i, зависящие от параметров оптимизации связи, для решения которых используются существующие алгоритмы линейного программирования. При одноразовом решении (3.1.7) возможно определить точку минимума (максимума) функции (3.1.4), лежащую на нижней (верхней) границе неканонической функции (3.1.1) при заданном значении коэффициентов C_i.

Многошаговое решение (3.1.7) позволяет определить множество минимальных (максимальных) значений линейной формы, геометрическим методом которого является нижняя (верхняя) граница неканонической функции (3.1.1), а также интервалы возможного изменения критериев подобия π_i при неизвестной исходной информации.

3.2. Критериальный анализ технико-экономических моделей с ограничениями с использованием алгоритмов линейного программирования

Решение технико-экономических задач положительной степени трудности часто осложняется тем, что в задаче присутствуют функциональные ограничения. Если задача решается классическими методами, то немаловажную роль в отыскании условного экстремума играет метод множителей Лагранжа; тогда решение исходной задачи ищется среди стационарных функций $L(x, \mu)$.

В задачах линейного программирования функции Лагранжа отводится важное место. При определенных условиях задача линейного программирования сводится к отысканию базисной точки функции Лагранжа [51]. Согласно определению, базисная точка функции $L(x, \mu)$ — это пара, если

$$L(\overset{*}{x},\overset{*}{\mu}) = \min(\max)L(x,\mu) = \max(\min)L(x,\mu) \qquad (3.2.1)$$
$$x \in \Gamma, \mu \geq 0 \; \mu \geq 0, \quad x \in \Gamma, \mu \geq 0.$$

Необходимым и достаточным условием оптимальности $\overset{*}{x}$, согласно теореме Куна—Таккера, является существование такого $\overset{*}{\mu}$, при котором полученная пара $\overset{*}{x},\overset{*}{\mu}$ является базисной точкой функции Лагранжа.

Исходная целевая функция записана в критериальной форме, и условия задачи таковы, что необходимо отыскать

$$\min(\max)\dot{y} = \min(\max)\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i\prod_{j=1}^{n}\dot{x}_j^{\alpha_{ij}}, \qquad (3.2.2)$$

где $y = (x_0)$ — точка условного минимума $\dot{y}(x) = \dfrac{y(x)}{y(x_0)}$.

В качестве функциональных ограничений присутствуют выражения вида:

$$q_1(\dot{x}) = \pi_{m1+1}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + \pi_{m1+2}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + ... + \pi_{m2}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1; \quad (3.2.3)$$

$$q_2(\dot{x}) = \pi_{m2+1}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + \pi_{m2+2}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + ... + \pi_{m3}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1; \quad (3.2.4)$$

$$q_p(\dot{x}) = \pi_{mp+1}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + \pi_{mp+2}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} + ... + \pi_{mp}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1; \quad (3.2.5)$$

$$\dot{x}_j = 1 \pm \delta_j; \; j = \overline{1,n}; \quad i = \overline{1,M;} \; M = m_{p+1}; \quad K = \overline{1,P}. \qquad (3.2.6)$$

Реализация задачи (3.2.2) с учетом функциональных ограничений (3.2.3), (3.2.4), (3.2.5) методами линейного программирования предполагает минимизацию (максимизацию) целевой функции вида

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m_1} C_i \pi_i \, . \qquad (3.2.7)$$

В качестве линейных ограничений используем условия нормализации и ортогональности в точке минимума (максимума)

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_{ij}\pi = 0, \; i = 1,2...,m_1, \; m_1+1, \; m_1+2,...,m_p+1; \\ \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1, \; i = 1, i \in K, K = \overline{1,P}. \end{gathered} \qquad (3.2.8)$$

Решение задачи как с учетом функциональных ограничений, так и без учета ограничений сводится к решению задачи линейного программирования. В настоящее время существует множество алгоритмов, численно реализующих данные задачи. Наиболее распространенным на сегодняшний день является симплекс-алгоритм.

3.3. Анализ моделей положительной степени трудности с учетом погрешностей параметров оптимизации

При решении технико-экономических задач методом критериального программирования большое значение имеет величина отклонения дисконтных затрат от точки условного минимума, определяющая область допустимых изменений оптимизируемых параметров, в пределах которого варианты исследуемого объекта будут экономически однозначны, а исследуемый объект экономически устойчив к изменению этих параметров.

При переходе от нелинейных моделей к линейной форме необходимо знать величину коэффициентов C_i целевой функции, представляющей собой выражение (3.1.5). Значения коэффициентов возможно оценить только в том случае, если известна информация о δ в окрестностях параметров оптимизации. Оценка окрестностей параметров оптимизации возможна двумя путями.

3.4. Прямая задача оценки экономической устойчивости практическим путем

При определенных условиях величину отклонений возможно оценить с достаточной степенью точности, используя статистические или натурные испытания того или иного объекта оптимизации. В результате этих испытаний появляются максимально допустимые отклонения параметров оптимизации, которые потом используются при переходе к задачам, использующим алгоритмы линейного программирования, если речь идет о задачах с положительной степенью трудности.

Формализация задачи может привести к большим погрешностям, которые ведут к неоптимальному решению всей задачи в целом.

В некоторых случаях реализация методов прямой оценки параметров оптимизации не представляется возможной. Иногда это связано с трудностями эксперимента, реализация которого дает ту необходимую информацию, которая требуется для оценки погрешности параметров. В ряде случаев невозможно провести статистический анализ распределения параметров оптимизации из-за недостаточной выборки. Поэтому актуальна методика оценки погрешности параметров, базирующихся на доступных алгоритмах реализации.

3.5. Обратная задача оценки экономической устойчивости с использованием алгоритмов квадратичного программирования

Для решения обратной задачи оценки экономической устойчивости величину погрешности параметров, полученную в результате максимизации отклонения всей исходной целевой функции от точки экстремума, выполняется замена переменных

$$\dot{x}_y = e^{*Z_j}, \ \ j = \overline{1,n}. \tag{3.5.1}$$

Тогда выражение (3.1.2) записывается следующим образам:

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i^{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \dot{Z}_j}. \tag{3.5.2}$$

Полученная преобразованная функция (3.5.2) в отличие от (3.1.2) имеет более широкую область определения, так как вектор $\dot{Z} = (\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, ..., \dot{Z}_n)$ изменяется на множестве вещественных чисел. Оптимальное значение функции (3.5.2) достигается в точке $Z = 0$.

Разложим функцию (3.5.2) в ряд Тейлора, ограничиваясь третьим членом разложения, который представляется выражением

$$\dot{y} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{dy}{d\dot{Z}_j}\bigg|\dot{Z}_0 (\dot{Z}_j - \dot{Z}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \ \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2 y}{d\dot{Z}_j}\bigg|\dot{Z}_0 (\dot{Z}_j - \dot{Z}_0)(\dot{Z}_j - \dot{Z}_0), \tag{3.5.3}$$

где

$$\frac{dy}{d\dot{Z}_j} = \nu_j = \sum_{p=1}^{m_1} \pi_p^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{pi}} \cdot \alpha_{pi}, k \in K \qquad (3.5.4)$$

в точке минимума

$$\frac{d\dot{y}}{d\dot{Z}_j} = 0 \qquad (3.5.5)$$

или

$$\nu_j = \sum_{p=1}^{m_1} \pi_p \alpha_{pi}, \quad j = \overline{1,n}\,. \qquad (3.5.6)$$

Тогда выражение (3.5.3) примет вид

$$\dot{y} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} \dot{Z}_i \dot{Z}_j\,, \qquad (3.5.7)$$

где

$$\nu_j = \sum_{p=1}^{m_1} \alpha_{pi} \alpha_{pj} \pi_p e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{pk} \dot{Z}_k} = \sum_{p=1}^{m_1} \alpha_{pi} \alpha_{pj} \pi_p\,. \qquad (3.5.8)$$

Частные производные функции (3.5.2) в точке условного минимума при $j \neq i$.

При $j = i$

$$\nu_{ij} = \sum_{p=1}^{m_1} \alpha_{pi}^2 \pi_p, \quad j = \overline{1,n}\,. \qquad (3.5.9)$$

После преобразования функция (3.5.2), называемая положительно показательной функцией, имеет условный миниимум, равный нулю. Из (3.5.1), (3.5.2) и (3.5.7) следует, что значения $\dot{Z}$ представляют собой не что иное, как погрешность параметров оптимизации δ_Z.

Таким образом, выражение (3.5.7) можно записать в виде

$$\varepsilon\dot{y} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij}\delta_i\delta_j\ , \qquad (3.5.10)$$

где

$$\varepsilon\dot{y} = \dot{y} - 1\left|\dot{Z}_j\right| = \delta_j, \left|\dot{Z}_j\right| = \delta_i\,.$$

Отыскание максимально возможного отклонения всей функции $\dot{y}$ от точки оптимума решается методом квадратичного программирования, так как функция цели (3.5.10) представляет собой квадратичную форму.

Если исходная целевая функция (3.1.2) без функциональных ограничений, то формулировка задачи квадратичного программирования сводится к задаче

$$\min x\varepsilon\dot{y} = \max(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m_1}\pi_i\sum_{j=1}^{m_1}\nu_{ij}\delta_i\delta_j), \qquad (3.5.11)$$

где $\delta_i \geq 0$.

В общем случае под задачей квадратичного программирования понимают задачу максимизации (минимизации) квадратичной функции при ограничениях.

Способы решения квадратичного программирования во многом определяются видом матрицы (ν_{ij}):

— если (ν_{ij}) — неотрицательно определенная матрица, то эта задача выпуклого программирования и любой локальный минимум будет ее решением;

— если матрица (ν_{ij}) — неположительно определенная матрица, то это задача вогнутого программирования.

Пусть (ν_{ij}) неотрицательно определенная матрица, а следовательно, неотрицательно определенная квадратичная форма (3.5.10). Для того чтобы выполнялось условие существования максимума функции ε_y, представляющее собой квадратичную форму (3.5.10), необходимо, чтобы функция была вогнутой, а именно, чтобы квадратичная форма была отрицательно полуопределенной:

$$\sum_{i=1}^{m_1} \pi_i \sum_{j=1}^{m_1} \nu_{ij} \delta_i \delta_j \leq 0 . \tag{3.5.12}$$

В предыдущем параграфе доказывалось, что квадратичная форма положительно полуопределенная, следовательно, чтобы перейти к задаче максимизации, необходимо изменить знак квадратичной формы на обратный.

Одним из методов численной реализации задачи максимизации (3.5.11) является метод сопряженных градиентов, который позволит решить задачу за число шагов, не превышающих ранга матриц квадратичной формы. Алгоритм решения задачи состоит из ряда последовательных циклов, причем в каждом цикле решается задача максимизации определенной квадратичной формы с помощью метода сопряжения градиентов.

Если исходная целевая функция, представляющая собой выражение (3.5.2), с функциональными ограничениями (3.5.3), (3.5.4), (З.5.5), (3.5.6), то задача отыскания отклонений параметров оптимизации может быть решена также методами квадратичного программирования.

Для этого раскладывается в ряд Тейлора входная целевая функция (3.5.2), предварительно введя новую (3.5.1). Исходя из (3.5.3), ряд Тейлора будет иметь вид:

$$\dot{y} = 1 + \sum_{j=1}^{n_1} \nu_{ij} \dot{Z}_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{n_1} \nu_{ij} \dot{Z}_i \dot{Z}_j . \tag{3.5.13}$$

Обозначая $\dot{y} - 1 = \varepsilon\dot{y}$; $\left|\dot{Z}_i\right| = \delta_i$; $\left|\dot{Z}_j\right| = \delta_j$, записываем

$$\varepsilon\dot{y} = \sum_{j=1}^{m_1} \nu_{ij} \delta_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_1} \nu_{ij} \delta_i \delta_j . \tag{3.5.14}$$

Функциональные ограничения (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5), (3.5.6) также раскладываются в ряд Тейлора, предварительно введя новую переменную (3.5.1) и ограничиваясь первыми двумя членами ряда Тейлора.

В этом случае функциональные ограничения представляют собой выражение

$$q_k(\dot{x}) = \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} \pi_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1, \quad k \in K \tag{3.5.15}$$

и будут иметь вид:

$$q_k(\dot{Z}) = \sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} \pi_i e \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ij}} \le 1, \quad k \in K. \tag{3.5.16}$$

В ряд Тейлора для (3.5.16) функциональные ограничения записываются следующим образом

$$q_k(\dot{Z}) \approx 1 + \sum_{j=1}^{n} \dot{\nu}_j Z_j, \quad \dot{\nu}_j = \sum_{p=m_{k+1}}^{m_{k+1}} \pi_p \alpha_{p_j}. \tag{3.5.17}$$

Пусть $\dot{Z}_j = \delta_j$.

Так как $q_k(\dot{Z}) \le 1$, то (3.5.17) будет иметь вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\nu}_j \delta_j \le 0. \tag{3.5.18}$$

Тогда формулировка задачи по отысканию отклонений параметров оптимизации, при условии, что на целевую функцию наложены функциональные ограничения, возможна как

$$\min x\varepsilon\dot{y} = \max\left(\sum_{j=1}^{n} \nu_j \delta_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} \delta_i \delta_j\right). \tag{3.5.19}$$

При линейных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\nu}_j \delta_j \le 0, \delta_j \ge 0 \qquad (3.5.20)$$

выражения (3.5.19), (3.5.20) представляют собой математическое трактование задачи максимизации отклонения целевой функции от своего оптимального значения. При этом доказано, что квадратичная форма (3.5.10), присутствующая в выражении (3.5.17), положительно определена, следовательно, чтобы приступить к задаче максимизации, изменяется знак перед квадратичной формой (3.5.19) на минус.

3.6. Численные алгоритмы реализации задачи с функциональными ограничениями

Способы решения задачи квадратичного программирования (3.5.19) определяются видом матрицы (ν_{ij}). В дальнейшем предполагается, что (ν_{ij}) — неотрицательно определенная матрица, так как в выражения (3.5.8), (3.5.9) входят критерии подобия π_p, причем $\pi_p \ge 0$. Следовательно (ν_δ, δ) — неотрицательно определенная квадратичная форма. Целевая функция (3.5.19), записанная в векторной форме

$$\varepsilon \dot{y} = (\nu_\delta, \delta) + \nu'', \delta, \qquad (3.5.21)$$

является выпуклой, и так как ограничения задачи линейные, то выполняются условия теоремы Куна—Таккера. Если δ — решение задачи (3.5.19), то существует вектор λ, такой, что пара (λ, δ) является базисной точкой функции Лагранжа, имеющей вид:

$$L(\delta, \lambda) = \varepsilon \dot{y} - (\lambda, \dot{\nu}, \delta), \ \delta \in E_n. \qquad (3.5.22)$$

Максимальное значение функции (3.5.22) достигается в точке δ = δ, причем $(\lambda, \dot{\nu}, \delta^*)V$.

Используя метод Гилдрета, задачу сводят к более простой задаче квадратичного программированиия. Для этого вводится дополнительное требование: матрица (ν_{ij}) — неособенная.

В этом случае функция (3.5.22) — строго выпуклая функция и вектор δ достигает своего максимума в единственной точке δ(λ), которая является решением линейной системы уравнений относительно δ, полученной из условия

$$\nabla L(\delta,\lambda) = 0 . \tag{3.5.23}$$

Если обозначить (ν_{ij}) через B, матрицу (ν_i) через C (ν_j) и d, тогда функция (3.5.22) будет иметь вид:

$$L(\delta,\lambda) = (B_\delta,\delta) + (C,\delta) + (\lambda, D_\delta) . \tag{3.5.24}$$

Следовательно, чтобы выполнялось условие (3.5.23), необходимо, чтобы

$$2B_\delta + C - D^T\lambda = 0 . \tag{3.5.25}$$

Система уравнений (3.5.25) решается относительно δ(λ):

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{2} B^{-1}\left[D^T\lambda - C\right]. \tag{3.5.26}$$

Подставив полученное выражение в (3.5.24),

$$\begin{gathered}\Phi(\lambda) = \frac{1}{4}(BB^{-1}\left[D^T\lambda - C\right]; \\ B^{-1}\left[D^T\lambda - C\right] + \frac{1}{2}(C, B^{-1}\left[D^T\lambda - C\right] - \frac{1}{2}(\lambda, D, B^{-1}\left[D^T\lambda - C\right]).\end{gathered} \tag{3.5.27}$$

Выражение (3.5.27) определено функцией Φ(λ) в области $\lambda \geq 0$ при $\lambda = \lambda^*$.

Таким образом, задача квадратичного программирования с общими ограничениями сведена к задаче квадратичного программирования с простейшими ограничениями $\lambda \geq 0$.

3.7. Чувствительность оптимального плана к изменению коэффициентов линейной формы

Одной из важных характеристик критериального анализа является чувствительность решения задачи оптимизации к коэффициентам, которые входят в задачу в виде обобщенных констант A_i. Если речь идет о задачах большой размерности и эта задача сформулирована в терминах линейного программирования, то в этом случае выполняется условие заданности коэффициентов C_i.

В зависимости от постановки задачи ее формулировка и реализация будут несколько отличны (см. (3.1.7),(3.2.7)), но общее условие решения задач положительной степени трудности сводится к минимизации линейной формы (3.1.7), (3.2.7).

Например, необходимо минимизировать по переменным π_i функцию вида:

$$\dot{y} = \pi_1 \dot{x}^{\alpha_{11}} + \pi_2 \dot{x}^{\alpha_{12}} + \pi_3 \dot{x}^{\alpha_{13}}\ , \qquad (3.7.1)$$

где

$$\underset{*}{x}^{\alpha_{11}} = C_1 = (1 \pm \delta)^{\alpha_{11}}, \quad \underset{*}{x}^{\alpha_{12}} = C_2 = (1 \pm \delta)^{\alpha_{12}}, \quad \underset{*}{x}^{\alpha_{13}} = C_3 = (1 \pm \delta)^{\alpha_{13}}.$$

Изменение величины δ ведет к изменению не только коэффициента C_1, но и коэффициентов $C_{2,}$ и C_3.

То есть при отклонении от минимума меняются все три составляющие целевой функции, причем задача решается в плоскостях, секущих поверхность целевой функции.

Если речь идет о минимизации линейной формы, исследование чувствительности к изменению коэффициентов переходит в прямую задачу устойчивости к изменению параметров оптимизации, варьирование которых в окрестностях точки минимума возможно проследить с помощью изменения величины δ. Замечено, что при изменении величины δ изменяется минимальное (максимальное) значение целевой функции

$$\min(\max)\dot{y} = \min(\max)\sum_{i=1}^{m_1} C_i \pi_i \ , \qquad (3.7.2)$$

но выступающие в качестве ограничений условия нормализации и ортогональности

$$\sum_{i=1}^{m_1} C_i \alpha_{ij} = 0, \quad \sum_{i=1}^{m_1} \pi_i = 1 \qquad (3.7.3)$$

не зависят от δ.

Пример. Необходимо минимизировать (максимизировать) полином π_i вида

$$\dot{y} = \pi_1 \dot{x}^{\alpha_{11}} + \pi_2 \dot{x} + \pi_3 \dot{x}^{-\frac{3}{2}} . \qquad (3.7.4.)$$

Пусть

$$C_1 = (1 \pm \delta)^8, \ \ C_2 = (1 \pm \delta), \ \ C_3 = (1 \pm \delta)^{-\frac{3}{2}} \quad \delta \in \{0,5;1,5\}$$

с шагом изменения для δ, равным 0,005.

Задача формулируется в терминах линейного программирования:

$$C_1\pi_1 + C_2\pi_2 + C_3\pi_3 \to \min(\max) \qquad (3.7.5.)$$

при линейных ограничениях

$$8\pi_1 + \pi_2 - \frac{3}{2}\pi_3 = 0$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 . \qquad (3.7.6)$$

Применив симплекс-алгоритм к решению задачи, получим множество решений задачи, зависящее от интервала и шага изменения δ.

Значения критериев подобия — $\pi_1 = 0;\ \pi_2 = \frac{3}{5};\ \pi_3 = \frac{2}{5}$.

Множество решений задачи максимизации — $\dot{y} = 0{,}157\dot{x}^8 + 0{,}843^{-\frac{3}{2}}$.

Кроме того, совокупность решений задачи позволяет оценить пологость ветвей исходной целевой функции, вернее ее верхней и нижней границы, а следовательно, и решить прямую задачу устойчивости нелинейной функции к изменению параметров оптимизации в окрестностях точки минимума при неизвестной исходной информации.

3.8. Алгоритм решения прямой и обратной задач устойчивости

3.8.1. Прямая задача оценки экономической устойчивости

1. Существующую задачу критериального анализа представить в линейной форме.

2. Отделить и записать коэффициенты C_i линейной формы в функции параметров $\dot{x}_j$.

3. Задать интервалы изменения параметров $\dot{x}_j$ в окрестностях точки экстремума функции.

4. Решить задачу минимизации (максимизации) линейной формы при фиксированном значении коэффициентов C_i. При этом считать, что $\dot{x}_j = \text{var}$, а все остальные значения $\dot{x}_j = 1;\ j = \overline{1, n-1};\ i \neq j$. Варьирование $\dot{x}_i$ задать с шагом δ.

5. После выполнения процедуры 4 по переменной $\dot{x}_i$ повторить 4 для всех переменных $\dot{x}_j,\ i \neq j$.

6. Полученные совокупности точек соединить плавной кривой в плоскостях, соответствующих каждой переменной $\dot{x}_j;\ j = \overline{1, n-1};\ i \neq j$.

7. Пологость полученных кривых определит решение прямой задачи устойчивости.

3.8.2. Обратная задача оценки экономической устойчивости

1. Выполнить пункт 1, 2 алгоритма прямой задачи оценки экономической устойчивости.

2. Задаться максимально возможным отклонением ε от своего экстремального значения.

3. Решать задачу минимизации (максимизации) линейной формы при фиксированном значении C_i до тех пор, пока полученные значения целевой функции будут не больше, чем $\dot{y}_j = 1 + \varepsilon$. Процедуру 3 повторить для всех переменных $\dot{x}_j$ с шагом варьирования $\dot{x}_j$, равным δ. Значения необходимо выбирать на порядок меньше, чем значение ε.

4. Полученные из 4 значения $\dot{x}_j = 1 \pm \delta$, где δ – максимально возможное отклонение параметра от точки экстремума, соответствующее точке $\dot{y}_j = 1 + \varepsilon$, определят интервал устойчивости.

Замечание. При реализации алгоритмов для задач с функциональными ограничениями необходимо после процедуры 4 выполнить проверку

$$\sum_{i=m_{k+1}}^{m_{k+1}} C_i \pi_i \le 1, \quad k \in K,\ k = \overline{1, P}.$$

4. КРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ

4.1. Постановка задачи

В настоящее время электрическая сеть (ЭС) должна быть построена экономически целесообразно с учетом технических параметров. Следовательно, необходимо знать, как будут изменяться ее параметры с течением времени, динамика процесса изменения которых зависит от темпов и роста нагрузки.

Как правило, для анализа ЭС используются однопараметрические технико-экономические модели. В таких моделях в качестве параметров оптимизации выбирается одна переменная. Реализация однопараметрических моделей доступна существующими классическими методами исследований.

Для проведения комплексного анализа ЭС с учетом перспективы ее развития обычно строятся технико-экономические модели, реализация которых дает полную картину поведения параметров оптимизации в оптимальном плане. В рамках комплексного анализа ЭС возможно использовать методы динамического и линейного программирования, позволяющие отыскивать оптимальный план развития системы электропередачи. Трудность решения задачи обусловлена тем, что динамическое программирование малоэффективно в реализации модели, содержащей более трех параметров оптимизации. Линейное программирование реализует линейные модели, что заведомо искажает действительную функциональную связь внутри объекта оптимизации, так как линейные модели линеаризуют все существующие нелинейные зависимости.

С появлением методов геометрического и критериального программирования стал возможным анализ нелинейных технико-экономических моделей ЭС.

Оптимальное построение ЭС требует выбора экономически целесообразных значений параметров, полученных в результате реализации технико-экономических моделей, отражающих специфику и перспективу развития. Кроме того, актуальны вопросы экономической устойчивости и чувствительности решения подобных задач, позволяющие делать определенные отступления от полученного оптимального плана. Весьма актуально проследить изменение экономически целесообразных параметров во времени, что заранее предопределит стратегию и тактику развития ЭС.

4.2. Анализ параметров электрической сети

Одним из критериев оптимального построения ЭС является минимум дисконтных затрат. Исходя из этого ставится задача определения минимальных значений затрат, а также наиболее целесообразных параметров оптимизации, по величине которых и строится оптимальная ЭС.

Прежде чем реализовать технико-экономические модели ЭС, необходимо проанализированы параметры, характеризующие и определяющие тот или иной вариант. В качестве таких параметров выбраны оценка математического ожидания плотности тока электрических сетей и радиусы их действия.

Анализ параметров ЭС на примере воздушных линий (ВЛ) 10 кВ нескольких районов электрических сетей восточной части Украины.

Считая появление плотности тока на участке линии случайной величиной, был произведен статистический анализ ВЛ 10 кВ нескольких районов ЭС Восточной части Украины.

Полученные результаты оформлены в виде статистического ряда и представлены в таблице 4.1.

Логарифмически нормальное распределение определяется двумя параметрами — j_0 и δ_z. Величина $\lg j_0$ представляет собой математическое ожидание случайной величины $Z = \lg I$, а δ_z ее среднеквадратическое отклонение. Оказалось, что $\lg j_0$ = — 0,4368, $\delta_z = -\,0{,}2880$.

Таблица 4.1

Рейтинг статистического анализа воздушных линий 10 кВ

l_i	0 ÷ 0,1	0,1 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,3	0,3 ÷ 0,4	0,4 ÷ 0,5	0,5 ÷ 0,6
m_i	5	24	18,5	23,5	20,5	10,5
P_i^*	0,038	0,180	0,140	0,170	0,155	0,080
l_i	0,6 ÷ 0,7	0,7 ÷ 0,8	0,8 ÷ 0,9	0,9 ÷ 1,0	1,0 ÷ 1,1	1,1 ÷ 1,2
m_i	8	11	6	3	2	I
P_i^*	0,060	0,083	0,045	0,023	0,015	0,007

где l_i — интервал значения плотности тока; m_i — число наблюдений в данном интервале; P_i^* — соответствующая частота появлений.

Зная параметры распределения, находят вероятность попадания случайной величины *I* на участок от α до β согласно выражению

$$P(\alpha < j > \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \tilde{m}}{\delta}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \tilde{m}}{\delta}\right), \qquad (4.2.1)$$

где $\tilde{m} = \lg j_0 = -0,4368$; $\delta = \delta_Z = -0,2880$; $\beta = \lg j_{i+1}$; $\alpha = \lg j_i$; j_i — граничное значение плотности тока по интервалам.

Согласно вышеизложенному, результаты расчета представлены в виде статистического ряда в таблице 4.2.

При проверке гипотезы (используя критерий Пирсона) ее можно считать не противоречащей опытным данным. В результате можно сказать, что оценка математического ожидания плотности тока в существующих сетях равна $\lg j_0 = -4368$, а значение $\tilde{j}$ = 0,365 А/мм².

Таблица 4.2

Результаты статистического анализа воздушных линий 10 кВ

l_i	0 ÷ 0,1	0,1 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,3	0,3 ÷ 0,4	0,4 ÷ 0,5	0,5 ÷ 0,6
P_i	0,067	0,156	0,205	0,165	0,134	0,080
l_i	0,6 ÷ 0,7	0,7 ÷ 0,8	0,8 ÷ 0,9	0,9 ÷ 1,0	1, ÷ 1,1	1,1 ÷ 1.2
P_i	0,076	0,045	0,031	0,022	0,018	0,013

Исходя из логарифмически нормального закона распределения плотности тока, можно определить интервал значения плотности тока с доверительной вероятностью λ. Оказалось, что этот интервал достаточно велик (0,1 ÷ 1,2) А/мм^2, поэтому считать полученное значение за интервал экономической устойчивости невозможно, так как практически любое значение плотности тока из этого интервала будет экономически целесообразным, что заведомо неверно.

Значение интервала с заданной доверительной вероятностью λ получилось в результате неодновременности начала эксплуатации сетей. Поскольку оценка математического ожидания плотности тока $\tilde{j}$ — непрерывная величина, то с определенным допущением ее рационально использовать в моделях электропередачи.

Чтобы построить сеть по оптимальному параметру $\tilde{j}$, значение его должно быть выдержано по всем участкам сети, что практически невозможно из-за дискретности шкалы сечений проводов, а также из-за тока нагрузки, меняющегося от участка к участку. Кроме того, как показал статистический анализ, радиусы охвата сетей 10 кВ Восточной части Украины имеют довольно широкий диапазон (от 6,3 км до 38,4 км).

Проведенные исследования подтвердили: необходимо учитывать предполагаемые параметры оптимизации в технико-экономических моделях ЭС для расчета экономически целесообразных значений параметров ЭС с учетом перспективы их развития.

4.3. Критериальный анализ технико-экономических моделей электрической сети

В качестве основных параметров оптимизации выбираются значения оценки математического ожидания плотности тока $\tilde{j}$, которая должна быть экономически целесообразной. Эти два параметра определяют радиус действия ЭС. Кроме того, предполагается равномерное распределение нагрузки по площади. В соответствии с выбранными величинами выражение дисконтных затрат на электропередачу имеет вид

$$З = З_0 + З_{1p}, \quad (4.3.1)$$

где

$$З_{1p} = \frac{4{,}55 \cdot K_{\text{ВЛ}} P_{\text{ВЛ}} \tilde{j}_p}{P_0 U_p \Delta U_p} + \frac{17 \cdot K_{\text{КТ}} P_{\text{m}} \tilde{j}_p^Z}{P_0 U_p \Delta U_p^2} + \frac{0{,}1\psi\lambda K_g P_g \Delta U_p}{\cos\phi \tilde{j}_p^2} + \\ + \frac{10^{-1}\psi_p \alpha_t^2 \beta}{\cos\phi}, \quad (4.3.2)$$

где $З_0$ — постоянная составляющая, не участвующая в процессе оптимизации, доля которой в общих затратах меньше $З_1$ и составляет (0,10 ÷ 0,14).

U_p — линейное напряжение электрической сети, кВ;

$K_{\text{ВЛ}}$ — стоимость километра ВЛ;

P_0 — плотность нагрузки района электропередачи;

$P_{\text{ВЛ}}$ — ежегодные суммарные отчисления:

$$P_{\text{ВЛ}} = P_{\text{н}} + P_{\text{т.р}} + P_{\text{об}},$$

где $P_{\text{н}}$ — коэффициент окупаемости;

$P_{\text{а}}$ — амортизационные отчисления;

$P_{\text{р}}$ — отчисления на текущий ремонт;

$P_{\text{об}}$ — отчисления на обслуживание.

$K_{\text{тп}}$ — стоимость подстанции (ПС);

$\text{Р}_{\text{тп}}$ — суммарше ежегодные отчисления от стоимости ПС;

ψ — коэффициент формы сети;
K_g — стоимость смонтированного провода;
P_g — годовые отчисления для системы электропередачи;
Т — число часов потерь;
ρ — удельное сопротивление проводников;
a_t — коэффициент динамики роста нагрузки.

Данная технико-экономическая модель имеет много переменных. Кроме того, модель упрощена за счет неучета стоимости потерь электрической энергии в трансформаторах ПС, так как предварительный анализ моделей показал, что доля участия этой составляющей в общей сумме затрат мала по отношению к остальным составляющим модели.

Уравнение (4.3.2) имеет вид

$$З_{1p} = A_{1\rho}\tilde{j}_\rho \Delta U_p^{-1} + A_{2\rho}\tilde{j}_\rho \Delta U_p^{-2} + A_{3\rho}\tilde{j}_\rho^2 \Delta U_p + A_{4\rho}\Delta U_p . \qquad (4.3.3)$$

Рассмотрим три варианта решения задачи (4.3.2).

В первом варианте не накладываем ограничений на величину потери напряжения ΔU до удаленного потребителя. При этом, если величина экономически целесообразного значения $\Delta Up_э$ не обеспечивает допустимый уровень напряжения у потребителей, то, в этом случае, необходимо вложить дополнительные средства в установку регуляторов напряжения, обеспечивающих заданный уровень напряжения у потребителей.

Второй вариант решения предполагает, что значения потери напряжения до удаленного потребителя ограничены с целью обеспечения у потребителей заданного уровня напряжения.

Третий вариант предполагает возможность резервирования по электрическим сетям, что является своеобразным техническим ограничением.

Критериальный анализ технико-экономической модели при решении задачи без ограничений показывает, что доля участия каждой составляющей в минимуме затрат $З_{1Р}$ определится как

$$\pi_1 = R;\ \ \pi_2 = \frac{1-2R}{6};\ \ \pi_3 = \frac{2-R}{6};\ \ \pi_4 = \frac{2-R}{6}, \qquad (4.3.4)$$

где R — критерий подобия, значение которого определяется исходной информацией.

Для оценки интервала изменения параметра необходимо решить:

$$\pi_2 \geq 0;\ i = \overline{1,4}. \qquad (4.3.5)$$

Экономически целесообразные значения параметров следующие:

$$\tilde{j}_{рэ} = A_{3\rho}^{1/2} A_{4\rho}^{-1/2}; \qquad (4.3.6)$$

$$\Delta U_{рэ} = 3R/(1-2R) A_{1\rho}^{-1} A_{2\rho} A_{3\rho}^{1/2} A_{4\rho}^{-1/2}; \qquad (4.3.7)$$

$$З_{1рэ} = 18RA_{1\rho}^{-1} A_{2\rho} A_{3\rho}^{1/2} A_{4\rho}^{-1/2} / (2-R)(1-2R). \qquad (4.3.8)$$

Численную реализацию (4.3.6–4.3.8) возможно получить при условии задания исходной информация и решении уравнения связи вида

$$R^3(54l+4) - 12R^2 + 9R - 2 = 0, \qquad (4.3.9)$$

где $l = A_{1\rho}^{-3} A_{2\rho}^{2} A_{3\rho}^{1/2} A_{4\rho}^{1/2}$.

Анализ (4.3.6–4.3,8) показывает, что экономически целесообразное значение плотности тока не зависит от степени трудности задачи, а определяется исключительно той информацией, которую несут обобщенные постоянные A_3, и A_4.

Таким образом, при различных вариантах ЭС тот вариант является экономически целесообразным, в котором среднестатистическое значение плотности тока совпадает со значением экономически целесообразного, полученного в результате реализации модели.

При проектировании ЭС экономическая соразмерность не всегда может быть выдержана из-за различного рода технических ограничений дискретного или функционального типов. Если считать, что значение потери напряжения не всегда варьирует на большом интервале и ограничено с целью обеспечения уровней напряжения у потребителей, а также соответствует стандартизируемому, то уравнение (4.3.2) имеет вид:

$$З^1_{1p} = A'_{1\rho}\tilde{j}_p + A'_{2\rho}\tilde{j}^2_p + A'_{3\rho}\tilde{j}^{-2}_p, \tag{4.3.10}$$

где

$$A'_{1\rho} = \frac{A_{1\rho}}{\left[\Delta U\right]_p};\; A'_{2\rho} = \frac{A_{21\rho}}{\left[\Delta U\right]_p};\; A'_{3\rho} = \frac{A_{3\rho}}{\left[\Delta U\right]_p};$$

$$З^1_{1p} = З_{1p} - A_{1\rho}\left[\Delta U\right]. \tag{4.3.11}$$

Использование (4.3.6), (4.3.7) приводит к следующим результатам:

$$\tilde{j}_{p0} = A_1 A_2^{-1}\left[\Delta U\right](2-3\lambda)/4\lambda; \tag{4.3.12}$$

$$З'_{1p0} = A_1 A_2^{-1}(2-3\lambda)/4\lambda^2. \tag{4.3.13}$$

Тогда

$$З_{1p0} = З'_{1p0} + A_4\left[\Delta U\right] \tag{4.3.14}$$

или

$$З_{1p0} = (A_1^2 A_2^{-1}(2-3\lambda)/4\lambda^2) + A_4\left[\Delta U\right], \tag{4.3.15}$$

где λ — решение нелинейного уравнения

$$56\lambda^4 = (2-3\lambda)(2-3\lambda)^3 \quad \text{при } \alpha = A_2^3 A_1^{-4} A_3\left[\Delta U\right]^{-1}. \tag{4.3.16}$$

Аналогичные выражения применимы к модели ЭС, которая имеет такую же структуру, как и модель (4.3.2), меняется лишь индексация обобщенных постоянных и параметров оптимизации

$$З_{1н} = A_{1н}\tilde{j}_н \Delta U_н^{-1} + A_{2н}\tilde{j}_н^2 \Delta U_н^{-2} + A_{3н}\tilde{j}_н^{-3} \Delta U_н + A_{4н} \Delta U_н. \quad (4.3.17)$$

Пример. Необходимо электрифицировать район с плотностью нагрузки P_0=10 кВт/км^2 и с напряжением электрической сети 10 кВ. Известно, что район отнесен ко второму району по гололеду. В соответствии с этим в задаче присутствует вполне определенная исходная информация: A_{1p} = 33,8; A_{2p} = 226; A_{3p} = 0,16; A_{4p} = 0,166.

Используя (4.3.12), (4.4.13), определяют экономически целесообразные значения параметров оптимизации:

$$\tilde{j}_{рэ} = 0{,}98 \text{ к/мм}^2;\ \Delta U_{рэ} = 13{,}4\%;\ З_{1рэ} = 8{,}16 \text{ ден.ед./кВт.}$$

При этом целесообразно, чтобы затраты распределялись следующим образом:

— 2,33 ден.ед./кВт — расходуется на ежегодные отчисления от ВЛ;

— 1,16 ден.ед./кВт — на отчисления от стоимости понижающих ПС;

— 2,33 ден.ед./кВт — на отчисления от стоимости проводов;

— 2,33 ден.ед./кВт — на покрытие потерь электроэнергии в распределительных сетях.

Определяется экономически целесообразное значение радиуса действия распределительной сети из условия, что

$$ч_{рэ} = K \Delta U_{рэ} / \tilde{j}_{рэ}. \quad (4.3.18)$$

Значение коэффициентов определяются из выражения

$$K = 10 U_p / \sqrt{3} K_p \xi_p, \quad (4.3.19)$$

где $r_{рэ}$ = 16,4 км.

Если в задаче принять, что потеря напряжения до удаленного

потребителя — величина заданная, например, $\Delta U_p = \left[\Delta U\right]_p = 6\%$, то оптимальные параметры электропередачи будут следующими:

$\tilde{j}_{p0} = 0{,}555$ А/мм^2, $З_{1н}$ = 9,5 ден.ед./кВт.

Таким образом, в случае отступления от экономически целесообразного варианта, оптимальная величина инвестиционных вложений увеличится на 1,34 ден.ед./кВт, а оптимальное значение оценки математического ожидания плотности тока уменьшится почти в два раза, значение радиуса действия сети в этом случае составит $r_{pэ}$ =12,4 км.

При росте нагрузки во времени значение плотности нагрузки изменяется по определенному закону, и можно предположить, что закон роста нагрузки не изменится в течение 7–10 лет. Тогда задачу по определению параметров ЭС можно решать многократно, изменяя плотность нагрузки по выбранному закону. В связи с этим получено решение третьего варианта задачи (4.3.2), когда при подключении к резервирующей ВЛ достаточно мощной нагрузки резервируемой ВЛ приводит к увеличению потерь напряжения. Это обстоятельство может привести к недопустимо низкому уровню напряжения на зажимах токоприемников. Для этих целей параметры электропередачи должны быть выбраны из условия, что в аварийных ситуациях происходит скачкообразное увеличение плотности нагрузки. Для того, чтобы сохранить параметры ЭС близкими к оптимальным, нужно производить их выбор в соответствии с увеличенной плотностью нагрузки теми графиками, которые отражают изменение оптимальных параметров электропередачи во времени. Аварийная ситуация предполагает скачкообразное изменение плотности нагрузки.

Если

$$r_{10} = K\frac{\Delta U_p}{\tilde{j}_{p1}}, \quad r_{20} = K\frac{\Delta U_p}{\tilde{j}_{p2}}, \tag{4.3.20}$$

то при заданном значении потерь напряжения $\Delta U_p = \left[\Delta U\right]_p$, $r_{20} < r_{10}$ в системе электропередачи предполагают резервирование по электрическим сетям. При заданной потере напряжения радиус действия таких сетей должен быть меньше во столько раз, во сколько $\tilde{j}_{p1} < \tilde{j}_{p2}$.

При прогнозировании на долгосрочную перспективу необходимо производить коррекцию закона роста нагрузки.

4.4. Отклонение от оптимальных решений

На практике из-за погрешности исходной информации следует находить не один формально оптимальный вариант, а исследовать экономическую устойчивость технико-экономической модели.

Исходная целевая функция переменной части инвестиционных вложений в ЭС имеет вид

$$\dot{З}_{1p} = \pi_1 \tilde{j} \Delta U^{-1} + \pi_2 \tilde{j}^2 \Delta U^{-2} + \pi_3 \tilde{j}^{-2} \Delta U^{-2} + \pi_{1\rho} \Delta U. \qquad (4.4.1)$$

Значение критериев подобия (4.4.1) не определяется однозначно, как это было показано раньше, а зависит от параметра R при $R \in \{0,05\}$.

Таким образом, представляет определенный интерес решение прямой и обратной задачи экономической устойчивости (4.4.1), которое предопределяет нахождение границ равной точности в зависимости от максимально допустимого отклонения целевой функции от своего же минимального значения. Для этого используются алгоритмы, разработанные в разделе 3, и симплекс-метод.

4.5. Иерархическая модель электрической сети

4.5.1. Критериальный анализ сети с учетом иерархии напряжения

В отличие от ранее рассмотренных моделей, которые отражают вопросы электропередачи, данная модель включает в себя как ту, так и другую составляющие и представляет собой дисконтные затраты в ЭС.

Основные переменные:

— радиусы действия сети;

— мощность ПС;

— оценка математических ожиданий плотностей тока в ЭС.

Общее выражение дисконтных затрат имеет вид:

$$З = З_{p\Sigma} + З_{н\Sigma}, \tag{4.5.1}$$

где $З_{p\Sigma}$ — дисконтные затраты электроснабжения района;

$З_{н\Sigma}$ — дисконтные затраты в ЭС.

Каждая составляющая из (4.5.1) представляет собой выражение

$$З_{\dot{p}_{\Sigma}} = \sum_{i=1}^{5} З, \tag{4.5.2}$$

где

$$З_1 = 10\sqrt[4]{2}\Delta U_p U_p K_{ВЛ} P_{ВЛ} / \sqrt{3}\xi \tilde{j}_p P, \tag{4.5.3}$$

причем $K_{ВЛ}$ – стоимость одного километра ВЛ;

U_p — напряжение ЭС;

ΔU_p — суммарные потери напряжения до удаленного потребителя;

ζ — коэффициент ЭС;

$\tilde{j}_p$ — оценка математического ожидания плотности тока в ЭС;

ρ — удельное сопротивление проводов в ЭС;

$P_{ВЛ}$ — ежегодные суммарные отчисления от стоимости ВЛ;

N — число ПС.

Соотношения между суммарными потерями напряжения и радиусом действия ЭС определяется как

$$\Delta U_p = \sqrt{3}\xi \tilde{j}_p \rho K_p r_p / 10 U_p \ (\%), \qquad (4.5.4)$$

где r_p — радиус действия ЭС;

K_p — коэффициент, учитывающий криволииейность трассы.

Первая составляющая технико-экономической модели (4.5.2) имеет вид

$$З_1 = \sqrt{2} K_p K_{\text{ВЛ}} P_{\text{ВЛ}} r_p N. \qquad (4.5.5)$$

Вторая составляющая (4.5.2)

$$З_2 = K_{\text{ПС}} P_{\text{ПС}} N 10^3, \qquad (4.5.6)$$

где $P_{\text{ПС}}$ — ежегодные отчисления от стоимости ПС;

$K_{\text{ПС}}$ — стоимость ПС.

Стоимость ПС определяется выражением

$$K_{\text{ПС}} = K_{\text{П}} + K_{\text{у}} S, \qquad (4.5.7)$$

где $K_{\text{П}}$ — составляющая, не зависящая от мощности трансформатора;

$K_{\text{у}}$ — коэффициент переменной части стоимости ПС;

S — мощность трансформатора.

Мощность, кВА, ПС определяется из выражений

$$S = \frac{4 r_p P_0}{\cos\phi}, \qquad (4.5.8)$$

где P_0 — плотность нагрузки;

cosφ — среднее значение коэффициента мощности, присущее данному классу напряжения ЭС.

Таким образом, вторая составляющая имеет вид:

$$З_2 = K_{ПС} P_{ПС} N \cdot 10^3 + \frac{4K_у P_{ПС} P_0 r_p^2 N}{\cos\phi}. \qquad (4.5.9)$$

По третьей составляющей (4.5.2) определяются отчисления от стоимости потерь в трансформаторах, состоящие из двух частей.

$$З_3 = b_1 \Delta P_{xx} 8760 N + b_2 \Delta P_{кз} \tau N, \qquad (4.5.10)$$

где b_1 и b_2 — стоимость постоянных и переменных потерь в трансформаторах; τ — число часов потерь; $\Delta P_{xx}, \Delta P_{кз}$ — потери мощности в трансформаторе.

Потери холостого и короткого замыкания пропорциональны мощности трансформатора в степени 3/4, т. е.

$$\Delta P_{xx} = a_1 S^{3/4}, \qquad (4.5.11)$$

$$\Delta P_{кз} = a_2 S^{3/4}. \qquad (4.5.12)$$

Таким образом, третья составляющая (4.5.10) с учетом (4.5.8) будет

$$З_3 = 2\sqrt{2}\left(b_1 a_1 8760 + b_2 a_2 \tau\right) r_p^{3/2} P_0^{3/4} N / \left(\cos\phi\right)^{3/4}. \qquad (4.5.13)$$

По четвертой составляющей (4.5.2) определяются отчисления от стоимости ЭС

$$З_4 = З_4' + З_4''. \qquad (4.5.14)$$

Величина расчетных затрат, обусловленная постоянной составляющей стоимости ЭС определяется из выражения:

$$З_4' = K_Л P_Л l_{\Sigma} N, \qquad (4.5.15)$$

где $K_Л$ — стоимость км ЭС, приходящаяся на постоянную составляющую затрат; l_{Σ} — суммарная длина ЭС, приходящаяся на ПС; $P_Л$ — отчисления от стоимости ЭС.

Суммарная длина ЭС для ПС с радиусом действия r_p определяется выражением

$$l_{\sum} = 3{,}14 r_p^2 \left(\frac{P_0}{P_{\text{тп}}} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.5.16}$$

где $P_{\text{тп}}$ — средняя мощность потребительской подстанции 10/0,4.

$$\text{P}_{\text{тп}} = \text{S}_{\text{тп}} \left(\cos\phi \right). \tag{4.5.17}$$

Для равновеликого квадрата с учетом (4.5.17) суммарная длина ЭС определится как

$$l_{\sum} = 4{,}4 r_p^2 \left(\frac{P_0}{S_{mn} \left(cos\phi \right)} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.5.18}$$

Следовательно:

$$\text{З}'_4 = 4{,}4 K_{\text{Л}} P_{\text{Л}} r_p^2 \left(\frac{P_0}{\text{S}_{\text{тп}} \left(\cos\phi \right)} \right)^{\frac{1}{2}} \text{S}_{\text{тп}}^{\frac{1}{2}} \cdot N. \tag{4.5.19}$$

Отчисления от стоимости проводов определяются по выражению:

$$\text{З}''_4 = \frac{\psi \lambda p_m K_s \xi P_{\max}^2 P_{\text{л}} p}{80\sqrt{2} \Delta U_p U_p^2 P_0 \cos\phi N}, \tag{4.5.20}$$

где ψ — коэффициент формы сети; p_m — масса проводов, отнесенная к единице объема; K_s — стоимость смонтированного провода; λ — число проводов сети; $P_{\max}$ — мощность в максимум нагрузки.

Выражение для максимальной мощности можно представить как

$$P_{\max} = 4 r_p^2 P_0 N. \tag{4.5.21}$$

Из (4.5.4), (4.5.20), (4.5.21) записываются выражения для $З_4''$:

$$З_4'' = \frac{2\psi\lambda p_m K_s P_л \mathrm{P}_0 \mathrm{N} \mathrm{r}_\mathrm{p}^2}{\sqrt{6} U_p \cos\varphi K_p \tilde{j}_p}. \tag{4.5.22}$$

Пятая составляющая $З_5$ определяется отчислениями от стоимости потерь электрической энергии в сети:

$$З_5 = \psi\lambda\tau \tilde{j} p^2 P_{\max}^2 \xi B_3 \frac{10^{-3}}{80\sqrt{2} U_p U_p^2 P_0 \cos\phi N}, \tag{4.5.23}$$

где $B_з$ — стоимость потерь в ЭС.

Или

$$З_5 = \frac{2\psi\tau p b_3 P_0 10^{-3} \tilde{j}_p N r_p^3}{\sqrt{6} U_p K_p \cos\phi}. \tag{4.5.24}$$

Если привести затраты к 1 км² рассматриваемого района (площадь района $4r_p^2 N$), то выражение дисконтных затрат имеет вид:

$$\begin{gathered} З_5 = 0{,}25\sqrt{2} K_{\text{ВЛ}} P_{\text{ВЛ}} 10^3 r_\text{р}^{-1} + 0{,}25 K_{\text{пс}} 10^3 A_{\text{пс}} r_\text{р}^{-2} + \frac{K_у P_{\text{пс}}}{\cos\varphi} + \\ + 2^{-0{,}5}(b_1 a_1 8760 + b_1 a_1 \tau)\left(\frac{P_0}{\cos\varphi}\right)^{0{,}75} r_\text{р}^{-0{,}5} + 1.1 K_{\text{ВЛ}} P_{\text{ВЛ}} \left(\frac{P_0}{\cos\varphi}\right)^{0{,}5} S_{\text{тп}}^{-0{,}5} + \\ + \frac{\psi\lambda p_m K_\text{S} P_{\text{ВЛ}} P_0}{2\sqrt{6} U_p K_p \cos\varphi \tilde{j}_p^{-1}} + \frac{\psi\tau p b_3 \mathrm{P}_0 10^{-3}}{2\sqrt{6} U_p K_p \cos\varphi} \tilde{j}_p^2 P. \end{gathered} \tag{4.5.25}$$

Полученная нелинейная модель является составной частью общей модели ЭС с учетом иерархии напряжения.

4.5.2. Оптимальная технико-экономическая модель сети с учетом иерархии напряжения

Технико-экономическая модель ЭС с учетом иерархии напряжения формируется таким образом, чтобы в ней присутствовали интересующие параметры и доля постоянных составляющих затрат в модели была несоизмеримо мала по сравнению с основными затратами, также модель должна представить составную часть общей модели. Отличие данной модели от предыдущей в том, что в нее введена составляющая затрат на потери в трансформаторах.

Таким образом, дисконтные затраты зависят от следующих составляющих:

$$З_н = З_{1н} + З_{2н} + З_{3н} + З_{4н}, \quad (4.5.26)$$

где $З_{1н}$ — отчисление от стоимости ПС; $З_{2н}$ — отчисления от стоимости потерь энергии в трансформаторах; $З_{3н}$ — отчисления от стоимости ЭС 0,38 кВ; $З_{4н}$ — отчисления от стоимости потерь в ЭС 0,38 кВ.

Первая составляющая из (4.5,26) определяется, как

$$З_{1н} = K_{тп0,38} + K_{тп0,38} 10^3, \quad (4.5.27)$$

где $K_{тп0,38}$ — стоимость ПС; $K_{тп0,38}$ — суммарный коэффициент отчислений; $K_{тп}$ определяется по выражению

$$K_{тп0,38} = K'_п + K'_у + S'_{тп}, \quad (4.5.28)$$

где $K'_п$ — постоянная часть затрат; $K'_у$ — затраты на 1 кВт мощности; $S'_{тп}$ — мощность ПС.

Таким образом,

$$З_{1н} = K_{тп0,38} + P_{тп0,38}\, 10^3 N_{тп} + K'_у S'_{тп} 10^3 N_{тп}, \quad (4.5.29)$$

где $N_{тп}$ — число ПС.

Отчисления от стоимости потерь энергии в трансформаторах определяется по выражению:

$$З_{2н} = (b'_1 \Delta P'_{xx} 8760 + b'_1 \Delta P'_{кз} \tau) N_{ТП}, \quad (4.5.30)$$

где b'_1 b'_2 — стоимость потерь электрической энергии в трансформаторах 10/0,4 кВ; τ — число часов потерь; $\Delta P'_{xx}$, $\Delta P'_{кз}$ — потери мощности в трансформаторах.

В модели используются аппроксимирующие выражения потерь мощности

$$\Delta P'_{xx} = a'_1 S^{3/4}_{\text{тп}}, \tag{4.5.31}$$

$$\Delta P'_{\text{кз}} = a'_2 S^{3/4}_{\text{тп}}. \tag{4.5.32}$$

Таким образом,

$$З_{2н} = (b'_1 a'_1 8760 + b'_2 a'_2 \tau) N_{\text{ТП}}. \tag{4.5.33}$$

Затраты на сооружение сетей 0,38 кВ определяются двумя составляющими:

— стоимостью опор $З'_{3н}$;

— стоимостью проводникового материала $З''_{3н}$.

Стоимость электрической части сети

$$З''_{3н} = \frac{\psi \lambda' p_m K_н P_{л0,38} \rho P'^2_{\max} 10^3}{80\sqrt{2}\Delta U_н U_н^2 P'_0 \cos\varphi N_{\text{тп}}}, \tag{4.5.34}$$

где ψ — коэффициент формы сети; $P_{\text{л }0,38}$ — отчисления от стоимости ВЛ 0,38 кВ; $\xi_{0.38}$ — коэффициент сети 0,38 кВ; $U_н$ — линейное напряжение ЭС; P'_0 — плотность нагрузки населенного пункта; ρ — удельное сопротивление проводов; $K_{\text{Н}}$ — стоимость смонтированного провода; $K_{\text{н}}$ — плотность материала провода; $P'_{\max}$ — расчетный максимум нагрузки населенного пункта

$$P'_{\max} = \frac{4P'_{\max} r^3_{0,38}}{\sqrt{6} U_{\text{Н}} K_p \cos\phi \tilde{j}_{0,38}}, \tag{4.5.35}$$

где $r_{0,38}$ — радиус действия сети 0,38 кВ.

$$З''_{3н} = \frac{\psi \lambda' p_m K_{\text{М}0,38} P_{\text{л}0,38} P'_0 \ 10^3 N_{\text{ТП}} r^3_{0,38}}{\sqrt{6} U_н K_p \cos\phi \tilde{j}_{0,38}}. \tag{4.5.36}$$

Отчисления от стоимости потерь в ЭС 0,38 кВ определяются как

$$З_{4н} = \frac{\psi\lambda' \tilde{j}_{0,38} p^2 P'^2_{\max} \xi b_4 10^{-3}}{80\sqrt{2}\Delta U_н U_н^2 P_0' \cos\phi}, \qquad (4.5.37)$$

где $b_н$ — стоимость потерь в сети 0,38 кВ.

Или

$$З_{4н} = \frac{2\psi\lambda'\tau p b_н 10^{-3} P_0' \tilde{j}_{0,38} N_{mn} r_{0,38}^3}{\sqrt{6} U_н K_p \cos\phi}. \qquad (4.5.38)$$

Если привести затраты на населенный пункт к 1 км² площади (площадь населенного пункта $4r_{0,38}^{-2} N_{ТП}$), получается, что:

$$\begin{aligned} З_5 &= 0,25K'_п P_{тп\,0,38} 10^3 r_{0,38}^3 + 0,25K'_у S_{тп\,0,38} 10^3 S_{тп} r_{0,38}^{-2} + \\ &\frac{З'_{3н}}{4r_{0,38}^{-2} N_{ТП}} + 0,25(b_1 a_1 8760 + b_1 a_1 \tau) S_{тп}^{0,75} r_{0,38}^{-2} + \qquad (4.5.39) \\ &\frac{\psi\lambda' K_л P_{л0,38} P_0' \tilde{j}_{0,38}^{-1} r_{0,38}^3}{\sqrt{6} U_н K_p \cos\phi} + \frac{\psi\lambda'\tau p b_н 10^{-3} P_0' \tilde{j}_{0,38} r_{0,38}^3}{\sqrt{6} U_н K_p \cos\phi}. \end{aligned}$$

Полученное выражение является второй составной частью технико-экономической модели ЭС, к которой применимы алгоритмы критериального метода.

4.6. Обоснование оптимального варианта электрической сети

Задача оценки и выбора оптимального варианта ЭС на стадии проектирования решается в два этапа.

Первый этап состоит в решении оптимизационной задачи методом критериального программирования в общем виде безотносительно к исходной информации.

$$\begin{aligned} З &= A_0 + A_1 \cdot r_p^{-1} + A_2 \cdot r_p^{-2} + A_3 \cdot r_p^{-1/2} + A_4 \cdot S_{mn}^{-1/2} + \\ &+ A_5 \cdot r_p \cdot j_p^{-1} + A_6 \cdot r_p \cdot j_p + A_7 \cdot r_p \cdot j_p^{-2} + A_8 \cdot S_{mn} \cdot r_{0.38}^{-2} + \qquad (4.6.1) \\ &+ A_9 \cdot S_{mn}^{0.75} \cdot r_{0.38}^{-2} + A_{10} \cdot r_p \cdot j_{0.38}^{-2} + A_{11} \cdot r_{0.38} \cdot j_{0.38}^{-2}, \end{aligned}$$

где $A_1 + A_{11}$ — обобщенные константы, полученные из (4.5.25), (4.5.39).

Далее в решении задачи определяется наличие функциональных ограничений, таких как

$$\Delta U_p + \Delta U_H \le [\Delta U] , \tag{4.6.2}$$

где ΔU_p — потери напряжения до наиболее удаленной точки ЭС; ΔU_H — потери напряжения до наиболее удаленной точки сети 0,38 кВ; $[\Delta U]$ — суммарная допустимая потеря напряжения в ЭС свыше 1000 В и сети 0,38 кВ.

Из (4.6.2) формируется выражение

$$\frac{\Delta U_p}{\Delta U} + \frac{\Delta U_H}{\Delta U} \le 1 . \tag{4.6.3}$$

Используя связь потери напряжения до удаленного потребителя с радиусом охвата сети и плотностью тока, формируется выражение

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \xi_p \cdot \rho \cdot K_p \cdot R_p \cdot j_p}{10 \cdot U_p \cdot [\Delta U]} + \frac{\sqrt{3} \cdot \xi_H \cdot \rho \cdot K_{PH} \cdot r_{0.38} \cdot j_{0.38}}{10 \cdot U_p \cdot [\Delta U]} \le 1 . \tag{4.6.4}$$

Представим (4.6.4) в форме $A_{12} \cdot r_p \cdot j_p + A_{13} \cdot r_{0.38} \cdot j_{0.38} \le 1$.

Для нахождения экономически целесообразных параметров в задаче (4.6.1) как без ограничений, так и с ограничениями используются (4.3.12), (4.3.13), и получается общее решение неканонических технико-экономических моделей.

Таким образом, доли участия каждой составляющей в минимуме затрат для модели (4.6.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = R_1;\ \pi_2 = R_2;\ \pi_3 = 4R_3 - 2R_1 - 4R_2;\\
&\pi_4 = 1 + R_1 + 3R_2 - 6R_3 - 3R_5;\\
&\pi_5 = R_3;\ \pi_6 = R_3;\\
&\pi_7 = \frac{1}{3}\left(-2R_1 - 6R_2 + 12R_3 + R_4 + 9R_5\right);\\
&\pi_8 = R_4;\ \pi_9 = \frac{2}{3}\left(1 + R_1 + 3R_2 - 6R_3 - 2R_4 - 3R_5\right);\\
&\pi_{10} = \pi_{11} = R_5.
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

Экономически целесообразные значения параметров для (4.6.1) имеют вид:

$$j_{рэ} = A_5^{1/2} A_6^{1/2}; j_{0,38э} = A_{10}^{1/2} A_{11}^{1/2}; r_{рэ} = A_5^{-1} A_2 R_1 R_2^{-1}; S_{тп} = \\ = 1,5^4 A_8^{-4} A_9^4 R_4^4 (1 + R_1 + 3R_2 - 6R_3 - 2R_4 - 3R_5)^{-4}; \tag{4.6.6}$$

$$r_{0.38э} = R_1 A_1^{-1} (3A_2 A_7)^{\frac{1}{2}} \left[R_2 \left(-2 - 2R_1 - 6R_2 + 12R_3 + R_4 + 9R_5\right)\right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$З_э = A_1^2 A_2^{-1} R_1^{-1} R_2;$$

$$r_{0.38э} = R_1 A_1^{-1} (3A_2 A_7)^{\frac{1}{2}} \left[R_2 \left(-2 - 2R_1 - 6R_2 + 12R_3 + R_4 + 9R_5\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

При анализе модели (4.6.1) с ограничениями (4.6.5) доли участия каждой составляющей отличны от критериев подобия в задаче (4.6.1) без ограничений.

$$\pi_1 = R_1; \pi_2 = R_2; \pi_3 = 4R_3 - 4R_6 - 4R_2 - 2R_1;$$
$$\pi_4 = 1 + R_1 + 3R_2 - 6R_3 - 3R_5 - 5R_6 - 2R_7; \pi_6 = R_3;$$
$$\pi_7 = \frac{1}{3}\left(-2 - 2R_1 - 6R_2 + 12R_3 + R_4 + 9R_5 + 10R_6 - 7R_7\right); \tag{4.6.7}$$
$$\pi_8 = R_4; \pi_9 = \frac{2}{3}\left(2 + 2R_1 + 6R_2 - 12R_3 - 4R_4 - 6R_5 - 10R_6 + 4R_7\right);$$
$$\pi_{10} = R_5 + R_7; \pi_{11} = R_5; \pi_{12} = R_5; \pi_{11} = R_7.$$

Оптимальное значение параметров в решении задачи (4.6.1) с ограничениями имеет следующее выражение:

$$j_{p0} = A_5^{\frac{1}{2}} A_6^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_3}{R_3} + R_6\right)^{\frac{1}{2}}; j_{0,380} = A_{10}^{\frac{1}{2}} A_{11}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{R_5}{R_5} + R_7\right)^{\frac{1}{2}}; \tag{4.6.8}$$

$$r_{p0} = A_1^{-1} A_2 R_1 R_2^{-1};$$

$$S_{\text{Т}0_0} = 1.5^4 A_8^{-4} A_9^4 R_4^4 (1 + R_1 + 3R_2 - 6R_3 - 2R_4 - \\ - 3R_5 - 5R_6 - 2R_7)^{-4};$$

$$r_{0.38_0} = R_1 A_1^{-1} (3A_2 A_7)^{\frac{1}{2}} \left[R_2 \begin{pmatrix} -2 - 2R_1 - 6R_2 + 12R_3 + \\ +R_4 + 9R_5 + 10R_6 + 7R_7 \end{pmatrix} \right]^{-\frac{1}{2}};$$

$$З_0 = A_1^2 A_2^{-1} R_1^{-2} R_2.$$

Вторым этапом решения задачи является выбор наиболее экономичного варианта из всего множества вариантов, которые описаны (4.6.7) и (4.6.8). Для этого необходимо раскрыть информацию, заложенную в обобщенных константах A_i, и перейти к числовой реализации задач. В зависимости от множества вариантов, каждый из которых определяется своей исходной информацией, выбирается наиболее целесообразный, который и является оптимальным вариантом ЭС.

4.7. Унификации элементов в электрических сетях

В последнее время наблюдается тенденция к расширению использования унифицированных (стандартизованных) элементов в вопросах проектирования и эксплуатации ЭС. Эффективность унификации для ВЛ обеспечивает:

— сокращение сроков разработки и сооружения ВЛ за счет использования ограниченного числа опор, фундаментов, марок проводов, изоляции и арматуры;

— проведение качественного контроля надежности при их изготовлении;

— уменьшение ошибок персонала при строительстве и эксплуатации ВЛ;

— сокращение эксплуатационного запаса отдельных элементов ВЛ;

— снижение стоимости сооружения ВЛ, за счет конкуренции между отдельными изготовителями элементов ВЛ.

Из нескольких вариантов ВЛ необходимо выбрать такой, который удовлетворит условие экономической целесообразности выбираемого объекта с учетом фактора времени.

Задачи унификации ВЛ относятся к технико-экономическим задачам в электроэнергетической отрасли.

При решении подобного рода задач в электроэнергетической отрасли критериальным методом определяются экономически целесообразные значения параметров оптимизации

$$x_{j0} = x(R_a, A_i); \tag{4.7.1}$$

$$y_{j0} = e(R_a, A_i), \tag{4.7.2}$$

где A_i — обобщенные константы, несущие определенную исходную информацию; R_a — критерии подобия, зависящие от исходной информации.

Интерес представляет рассмотрение динамического процесса в ЭС, связанного с изменением оптимальных параметров в течении времени (с учетом фактора времени).

Исходная информация, участвующая в (4.7.1) и (4.7.2) в виде обобщенных констант A_i, изменяется во времени.

Если представить исходную информацию с учетом фактора времени, то выражения (4.7.1) и (4.7.2) будут иметь вид

$$x_{j0}(t) = \prod_{i=1}^{n+1} \left[A_i(t) / \pi_i(R_a) \right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \tag{4.7.3}$$

$$y(x_{0,}t) = \prod_{i=1}^{n+1} \left[A_i(t) / \pi_i(R_a) \right]^{-\frac{\Delta i}{\Delta}}. \tag{4.7.4}$$

Выделение обобщенных констант, зависящих в свою очередь от фактора времени t, не предполагает введение нового параметра оптимизации и исходной функции цели, поскольку ставится задача определения чувствительности параметров оптимизации с учетом фактора времени. Это позволит учитывать темпы изменения нагрузок при проектировании ЭС, то есть прогнозировать, какими должны быть экономически целесообразные параметры ЭС через определенное количество лет.

Для анализа чувствительности значение параметров оптимизации функции x к изменению данных A_i с учетом фактора времени допустимо выразить относительные их значения через относительные значения коэффициентов A_i:

$$\underset{*}{x}_{j0}(t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}(t)/\underset{*}{\pi_i}(R_a)\right]^{-\frac{\Delta ij}{\Delta}}; \qquad (4.7.5)$$

$$\underset{*}{y}(\underset{*}{x_0}, t)=\prod_{i=1}^{n+1}\left[\underset{*}{A_i}(t)/\underset{*}{\pi_i}(R_a)\right]^{-\frac{\Delta i}{\Delta}}, \qquad (4.7.6)$$

где $\underset{*}{A_i}(t)=\dfrac{A_i(t)}{A_{i\delta}(t)}$; $\underset{*}{\pi_i}(R_a)=\pi_i(R_a)/\pi_{i\delta}(R_a)$.

Полученные выражения позволяют проследить изменение целесообразных значений параметров с учетом фактора времени.

Так как исходная информация об исследуемом объекте используется с определенной погрешностью, то при анализе объекта желательно знать, как влияет на функцию цели отклонение параметров оптимизации от своих экономически целесообразных значений. Считают модель устойчивой, если малые отклонения ее параметров ведут к незначительным отклонениям функции цели.

При решении технико-экономичексих задач электроэнергетической отрасли важно знать влияние отклонения информации на экономический вариант.

Задача формулируется достаточно корректно с сохранением физической сущности объекта.

Для исследования чувствительности параметров к изменению информации с учетом фактора времени целевая функция дисконтных затрат имеет вид:

$$З = A_1x_1x_2^{-1} + A_2x_1^{2}x_2^{-2} + A_3x_1^{-2} + A_4x_2\ldots.. \quad . \qquad (4.7.7)$$

Коэффициенты A_1 A_2 зависят от фактора времени следующим образом:

$$A_1=\frac{A_1'}{P},\; A_1=\frac{A_2'}{P}, \qquad (4.7.8)$$

где P — функция изменения плотности нагрузки.

P изменяется по закону

$$P = P_0(1+q)^t, \qquad (4.7.9)$$

где q — изменение электрической нагрузки; P_0 — начальная плотность нагрузки.

При решении технико-экономических задач критериальным методом большое значение имеет величина отклонения дисконтных затрат от точки условного минимума, определяющая область допустимых изменений оптимизируемых параметров, в пределах которого варианты исследуемого объекта будут экономически однозначны, а исследуемый объект экономически устойчив к изменению этих параметров.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Перечислите составляющие задач технико-экономического анализа.
2. Какие математические модели применяют для оптимизации систем электропередачи?
3. Суть оценочных математических моделей.
4. Суть оптимизационных математических моделей.
5. Принцип выбора метода реализации математической модели.
6. Основные особенности критериального метода анализа технико-экономических моделей.
7. Содержание метода критериального программирования.
8. Анализ канонических моделей критериальным методом.
9. Анализ неканонических моделей критериальным методом.
10. Какое математическое трактование анализа технико-экономических моделей?
11. Принцип обоснования решения задачи анализа технико-экономических моделей.
12. Что представляют собой неканонические модели?
13. Алгоритм расчета параметров оптимизации в неканонических моделях.
14. Экономическая устойчивость целевой функции в окрестностях точки минимума.
15. В чем заключается прямая и обратная задачи определения устойчивости целевой функции в окрестностях точки минимума?
16. Фактор времени в развитии систем электропередачи.
17. Алгоритмы линейного программирования при критериальном анализе технико-экономических моделей.
18. Анализ технико-экономических моделей положительной трудности.
19. Алгоритмы реализации задачи с функциональными ограничениями.
20. Чувствительность оптимального плана к изменению коэффициентов линейной формы.
21. Использованием алгоритмов квадратичного программирования в задачах оценки экономической устойчивости.
22. Построение технико-экономической модели системы электропередачи с учетом иерархии электрической сети.
23. Обоснование оптимальной системы электропередачи.
24. Эффективность унификации в системах электропередачи.
25. Изменение значений параметров оптимизации с учетом фактора времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абакаров А.Ш. О численном подходе к получению Парето-оптимальных альтернатив / А.Ш. Абакаров, Ю.А. Сушков // Наука в образовании: Электронное научное издание, 2008.
2. Астахов Ю.Н. Критериальный метод и его применение для анализа систем электроснабжения. Учебное пособие / Ю.Н. Астахов, Н.М. Черемисин, Б.М. Ильченко. — Харьков: ХИМЭСХ, 1986. — 45 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 400 с.
4. Большой энциклопедический словарь / Отв. ред. В.Н. Ярцева. — М.: Большая Российская энциклопедия, 1998. — 685 с.
5. Бондаренко В.О. Системний підхід передпроектної оцінки повітряних ліній в умовах ринкових відносин / В.О. Бондаренко, Н.М. Черемісін, В.В. Черкашина. Монографія. — Х.: Факт, 2013. — 259 с.
6. Будзко И.А. Унификация воздушных линий электропередечи / И.А. Будзко, Ю.Н. Астахов, Н.М Черемисин // Электричество. — 1982. — № 2. — С. 1–8.
7. Воропай Н. И. Многокритериальный анализ решений при планировании развития электроэнергетических систем / Н.И. Воропай, Е.Ю. Иванов // Электричество. — 2000. — № 11. — С. 45–49.
8. Дерзкий В. Г. Принятие решений в электроэнергетике при нескольких критериях / В. Г. Дерзкий // Электричество. — 1991. — № 1. — С. 17–25.
9. Емельянов С. В. Многокритериальные методы принятия решения / С. В. Емельянов, С. И. Ларичев. — М.: Знание, 1985. — 32 с.
10. Карманов В.Г. Математическое программирование/ В.Г. Карманов. — М: Наука, 1975. — 270 с.
11. Лежнюк П.Д Методи оптимізації в електроенергетиці. Критеріальний метод / П.Д. Лежнюк, С.В. Бевз. — Вінниця: ВДТУ, 1999. — 177 с.
12. Лежнюк П.Д. Аналіз чутливості оптимальних рішень в складних системах критеріальним методом. Монографія / П.Д. Лежнюк. — Вінниця: Універсум-Вінниця, 2003. — 131 с.
13. Лежнюк П.Д. Унфикация воздушных линий в условиях рынка двусторонних договоров и балансирующего рынка электроэнергии / П. Д. Лежнюк, Н. М. Черемисин, В. В. Черкашина. — Наукові праці ВНТУ, 2013. — № 4. — С. 1–8.
14. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. — М.: Наука, 1982. — 254 с.
15. Химельбау Д. Нелинейное программирование / Д. Химельбау. — М: Мир, 2007. — 267 с.
16. Черемисин Н.М. Критериальный анализ технико-экономических моделей ВЛ в условиях неполноты исходной информации / Н.М. Черемисин, В.И. Романченко // Збірник наукових праць ХДТУСГ «Питання електрифікації сільського господарства». — Х.: ХДТУСГ. — 1998. — С. 21–25.
17. Черемисин Н.М. Модели и методы технико-экономического анализа воздушных линий 110–750 кВ / Н.М. Черемисин, В.И. Романченко, В.В. Черкашина // Весник Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. Петра Василенко. — 2009. — Вип. 86. — С. 9–14.
18. Черемисин Н.М. Стратегия выбора оптимального решения при проектировании воздушных линий электропередачи / Н.М. Черемисин, В.И. Романченко, В.В. Черкашина // Вісник Вінницького політехнічного інституту. — Вінниця: ВНТУ. — 2012. — № 2. — С. 115–118.
19. Черкашина В.В. Реализация технико-экономических задач в электроэнергетике критериальным методом / В.В. Черкашина // Інтегровані технології та енергозбереження. — Х.: НТУ «ХПІ». — 2007. — № 4. — С. 53–56.

СОДЕРЖАНИЕ

Наукове видання

ЧЕРЕМІСІН Микола Михайлович
ЧЕРКАШИНА Вероніка Вікторівна

КРИТЕРІАЛЬНИЙ МЕТОД АНАЛІЗУ ТЕХНІКО-ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ В ЕЛЕКТРИЧНИХ МЕРЕЖАХ І СИСТЕМАХ

Навчальний посібник

(Рос. мовою)

Комп'ютерна верстка *О. А. Ільїної*

Коректор *О. В. Ковалевський*

Підписано до друку 13.06.2014. Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Гарнітура Таймс. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 5,23.
Тираж 300 прим. Зам. 13_06_01.

Видавництво «Факт»
Україна, 61166, м. Харків, вул. Бакуліна, 11, оф. 4-28.
Тел./факс: (057)765-43-75. E-mail: publish_fakt@mail.ru
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ДК № 3172 від 22.04.2008 р.

Виготовлено у ФОП В. Є. Гудзинський
Україна, 61072, м. Харків, вул. 23-го Серпня, 27.
Тел./факс: (057)340-52-26.
Свідоцтво про держреєстрацію: серія ХК № 269 від 23.11.2010 р.